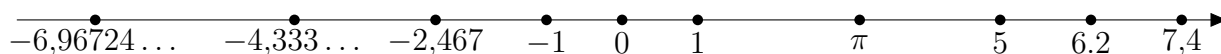


Définition des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ - Exemples

A Rappels sur les nombres réels

Rappelons simplement que $\mathbb{R}$ est l'**ensemble des nombres réels**. Les nombres réels (ou tout simplement « **les réels** ») sont les nombres correspondant aux **abscisses des points sur une droite graduée**.



À tout nombre réel correspond un point unique sur une droite munie d'un repère (droite graduée).

Réciproquement, à tout point sur une droite graduée correspond un nombre réel unique.

Les définitions, notations et représentations des intervalles de $\mathbb{R}$ doivent être parfaitement connues.

Le document https://ophysis.net/pluginfile.php/75/mod_resource/content/4/NombresIntro.pdf présente brièvement les différents ensembles de nombres connus en milieu du secondaire et les intervalles de $\mathbb{R}$.

B Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

B.1 Définition d'une fonction

Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une **relation** entre deux grandeurs, l'une étant appelée **la variable** et l'autre **l'image** avec la propriété suivante :

La valeur de l'image est déterminée de façon unique par la valeur de la variable.

B.2 Exemples

Dans les exemples, « **est fonction de** » signifie « **est déterminé(e) de façon unique par** ».

- Le périmètre p d'un cercle **est fonction de** son rayon r : $p = 2 \cdot \pi \cdot r$ avec $\pi \approx 3,14159\dots$.
La variable est r et l'image est p . Le contexte nous impose la **condition d'existence** $r \geq 0$.
- La distance d parcourue par une voiture roulant à vitesse constante (par exemple 15m/s) **est fonction de** la durée t de son déplacement. Plus précisément, $d = 15 \cdot t$ avec d en mètres et t en secondes. La variable est la durée t et l'image est la distance d . Le contexte nous impose $t \geq 0$ et par ailleurs cette relation n'est plus vraie quand la vitesse de la voiture est modifiée, donc t a aussi une valeur maximale $t_{\max}$. Finalement, on a la **condition d'existence** $0 \leq t \leq t_{\max}$.
- La distance d parcourue par un objet lâché sans vitesse initiale et soumis uniquement à l'attraction terrestre **est fonction de** la durée t de la chute.
Plus précisément, $d = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ avec $a \approx 9,81 \text{ m/s}^2$. La variable est t et l'image est d . Là encore on a une **condition d'existence** du type $0 \leq t \leq t_{\max}$ car la chute ne dure pas indéfiniment.
- On effectue, dans une année, 4 mesures de température espacées de 3 mois. La température T est fonction du mois n considéré.

numéro du mois : n	1	4	7	10
Température en degrés Celsius à 15h00 : T	-3	10	22	5

Condition d'existence : la variable n doit appartenir à l'ensemble $\{1; 4; 7; 10\}$. Autrement dit, la fonction n'est pas définie pour des valeurs autres que 1, 4, 7 et 10.

B.3 Graphe et représentation graphique d'une fonction

L'ensemble $G_4 = \{(1; -3); (4; 10); (7; 22); (10; 5)\}$ est le graphe de la fonction de l'**exemple 4**.

Ce graphe (cet ensemble) ne contient que 4 éléments, plus précisément 4 couples de nombres.

En général, les graphes que nous étudierons contiendront une infinité de couples.

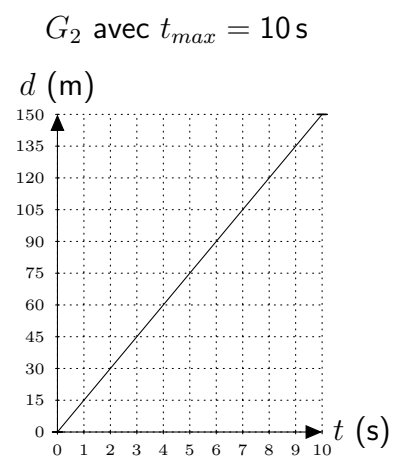
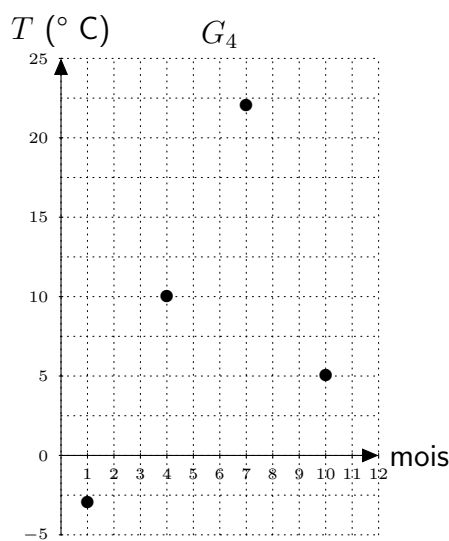
L'ensemble $G_2 = \{(t; d) \mid t \in [0 \text{ s}; 10 \text{ s}] \text{ ET } d = 15 \cdot t\}$ est le graphe de la fonction de l'**exemple 2**.

Pour représenter graphiquement une fonction (son graphe), on se place dans un plan muni d'un repère.

L'**axe horizontal** du repère est appelé **axe des abscisses**. Il sert à représenter les valeurs de **la variable**.

L'**axe vertical** est appelé **axe des ordonnées**. Il sert à représenter les valeurs de **l'image**.

Chaque couple (valeur de la variable; valeur de l'image) du graphe de la fonction est représenté par le point ayant ce couple de réel comme coordonnées dans le repère.



B.4 Le cas général : la notation $f(x)$

Dans le cas général, on appelle souvent f la fonction considérée.

x représente la variable (libre).

y représente l'image (aussi appelée la variable liée).

Pour indiquer que la valeur de l'image y est déterminée par la valeur de la variable x et la connaissance de la fonction f , on note aussi que $y = f(x)$.

$f(x)$ est un nombre, c'est l'image y de la variable x par la fonction f .

On peut considérer d'autres fonctions qu'on appelle souvent g , h , f_1 , f_2 , ... On peut les appeler comme on veut !

B.5 Exemples et abus de notation

Appelons f_2 la fonction définie par le graphe G_2 (l'**exemple 2**) :

Les différentes valeurs de t précisent la durée du déplacement. t est la variable (libre) de la fonction.

Les différentes valeurs de d précisent la distance parcourue. d est l'image de la variable t par la fonction f_2 .

On peut donc noter que $d = f_2(t)$.

(Dès que l'on donne une valeur particulière à la variable t , alors la valeur de d est déterminée de façon unique).

Par exemple, après une durée de déplacement de $t = 3$ s, la voiture, qui roule à 15 m/s, a parcouru la distance $d = 15 \cdot 3 = 45$ m.

La phrase précédente est résumée par l'écriture : $d = f_2(3 \text{ s}) = 45 \text{ m}$.

Dans la pratique, on effectue souvent un **abus de notation** et on écrit simplement : $d(3 \text{ s}) = 45 \text{ m}$.

On utilise la lettre d pour désigner à la fois l'image (un nombre) et la fonction : $f_2 = d$!

De même, en appelant aussi T (même nom que l'image qui est un nombre !) la fonction de l'**exemple 4**, on peut écrire :

$$T(1) = -3^\circ\text{C} \quad T(4) = 15^\circ\text{C} \quad T(7) = 22^\circ\text{C} \quad T(10) = 5^\circ\text{C}$$

$T(7) = 22^\circ\text{C}$ signifie qu'au mois de juillet (mois numéro 7), la température moyenne T mesurée a été de 22°C .

Dans la phrase précédente, la lettre T a été utilisée à la fois comme nom de fonction d'abord, puis comme nom d'un nombre (l'image) : c'est aussi un abus de notation !!

B.6 Domaine de définition d'une fonction

Quand on définit une fonction f , il est essentiel de préciser quelles sont les valeurs de la variable x qui ont une image y par f .

L'ensemble de ces valeurs est le domaine de définition de f . Il est noté $\text{dom} f$.

Formellement : $\text{dom} f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe}\}$

Notons f_1 , f_2 , f_3 et f_4 les fonctions définies par les 4 exemples précédents.

1. $\text{dom} f_1 = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$ ou plus simplement $\text{dom} f_1 = [0; +\infty[$ ou $\text{dom} f_1 = \mathbb{R}^+$
2. $\text{dom} f_2 = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq 10\}$ ou plus simplement $\text{dom} f_2 = [0; 10]$ en supposant $t_{\max} = 10$ s
3. $\text{dom} f_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq t_{\max}\}$ avec $t_{\max}$ la durée de la chute.
4. $\text{dom} f_4 = \{1; 4; 7; 10\}$

Connaissant le procédé permettant d'obtenir y connaissant x et le domaine de définition de f , on peut en déduire le graphe de f (et le représenter graphiquement, du moins une partie ...) :

$$G_f = \{(x; f(x)) \mid x \in \text{dom} f\}.$$

Mais on peut aussi définir une fonction en explicitant son graphe G_f (comme dans l'exemple 4), auquel cas on peut déduire le domaine du graphe de f :

$$\text{dom} f = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists y, (x; y) \in G_f\}.$$

$\exists$ est un symbole mathématique qui signifie « il existe ».

B.7 Trouver le domaine de définition à partir d'une représentation graphique

Concrètement, pour trouver le domaine de définition de f à partir de sa représentation graphique, on considère une **droite verticale** que l'on déplace **de gauche à droite**. Quand celle droite verticale coupe le graphe de f , on en déduit que la valeur de x correspondante appartient au domaine de f .

B.8 Trouver l'ensemble image à partir d'une représentation graphique

Supposons le graphe G_f connu, l'ensemble image $\text{im } f$ de f est l'ensemble des y pour lesquels il existe x tel que $(x; y) \in G_f$.

Formellement, cela s'écrit : $\text{im } f = \{y \mid \exists x, (x; y) \in G_f\}$ ou encore $\text{im } f = \{f(x) \mid x \in \text{dom } f\}$

Concrètement, pour trouver l'ensemble image de f à partir de sa représentation graphique, on considère une **droite horizontale** que l'on déplace **de bas en haut**. Quand cette droite horizontale coupe le graphe de f , on en déduit que la valeur de y correspondante appartient à l'ensemble image de f .

B.9 L'ensemble $\text{Ant}_b f$ des antécédents d'un nombre b par une fonction f

L'ensemble des antécédents du nombre b par la fonction f est : $\{x \in \text{dom } f \mid f(x) = b\}$

C'est l'ensemble des nombres x appartenant au domaine de f tels que $f(x) = b$, c'est à dire tels que l'image de x par f est égale à b .

Concrètement, pour trouver les éventuels antécédents de b par f à partir de la représentation graphique de f , on considère la droite horizontale d'équation $y = b$. On regarde si cette droite horizontale coupe le graphe de f . Si oui, b appartient à l'ensemble image de f . Il a donc au moins un antécédent. **Il peut en avoir plusieurs, même une infinité !**

B.10 L'ensemble Rac_f des zéros (ou racines) de f

L'ensemble des zéros de f est l'ensemble des valeurs de la variable pour lesquelles l'image est égale à 0.

Ainsi, il s'agit tout simplement de l'ensemble $\text{Ant}_0 f$ des antécédents de 0 par f .

Graphiquement, on détermine l'intersection du graphe de f avec la droite horizontale d'équation $y = 0$. Sinon, si on connaît l'expression de f , on peut déterminer algébriquement (par calcul) Rac_f en cherchant l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

Formellement : $\text{Rac}_f = \{x \in \text{dom } f \mid f(x) = 0\}$

Par exemple, considérons la fonction définie par $f(x) = (x + 2)^2$ avec $\text{dom } f = \mathbb{R}$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \quad \text{donc } \text{Rac}_f = \{-2\}$$

B.11 L'ordonnée à l'origine d'une fonction f

L'ordonnée à l'origine d'une fonction f n'existe que si 0 appartient au domaine de définition de f . C'est alors l'image du nombre 0 par f : $f(0)$ si $0 \in \text{dom } f$.