A Notion de fonction - Vocabulaire - Caractéristiques

A.1 Dans chacune des situations suivantes, donne une formule exprimant la variable dépendante (l'image) en fonction de la variable libre (la variable)

a) Exprime l'aire A d'un carré en fonction de la longueur c de son côté.

b) Exprime la longueur c du côté d'un carré en fonction de son aire A.

c) Exprime le volume V d'un cube en fonction de la longueur c de son côté.

d) Exprime la longueur c du côté d'un cube en fonction de son volume V.

e) Un objet est placé sur un axe gradué. Exprime sa distance d à l'origine du repère en fonction de son abscisse x.

f) Un gâteau doit être partagé équitablement entre n personnes. Exprime, en fonction de n, la fraction p de gâteau que chaque personne va recevoir.

g) Le prix d'une place de cinéma est de 8 euros. Exprime la recette R en fonction du nombre n de places vendues.

A.2 Définition d'une fonction - Vocabulaire

Complète les phrases suivantes avec le vocabulaire approprié :

a) Une fonction h de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ fait correspondre à chaque valeur t **possible** de la ... un nombre b ... appelé ... et aussi noté simplement ... .

b) Parmi les ensembles (**graphes**) suivants, quels sont ceux qui définissent une fonction. Justifie et précise le cas échéant le domaine de définition de la fonction ainsi définie et son ensemble image.

$\mathcal{R}_1 = \{(2;3);(4;3);(5;6)\}$ $\mathcal{R}_2 = \{(2;3);(2;4);(5;6)\}$ $\mathcal{R}_3 = \{(x;x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{R}_4 = \{(x^2;x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

c) Complète la phrase suivante : $\mathcal{R}_4$ est le graphe ... du graphe $\mathcal{R}_3$.

A.3 Quelles propriétés traduisent les formulations mathématiques suivantes

Tu devras traduire chaque propriété en langage courant et faire un petit dessin pour l'illustrer.

P_1) $\forall x \in \mathrm{dom}h, x \in]7{,}5;8{,}1[\Rightarrow h(x) \geq h(8)$

P_2) $\forall x_1,x_2 \in [-2;5], x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) \geq g(x_2)$

P_3) $\forall x \in \mathrm{dom}f, x \in]2;5[\Rightarrow f(x) \leq f(3)$

P_4) $\forall x_1,x_2 \in [3;4]\,, x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$

P_5) $\forall x \in \text{dom}f, f(x) \leq f(-3)$

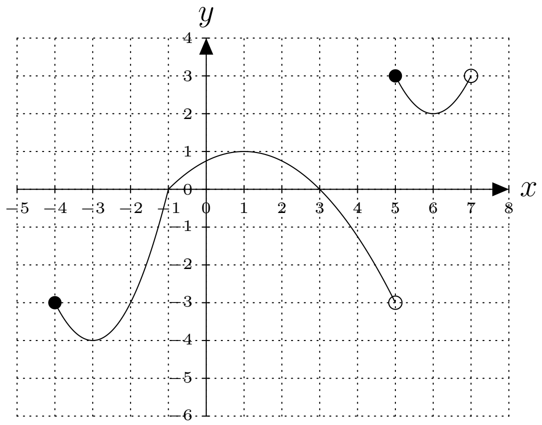
P_6) $x(0) = 4$

P_7) $\forall x \in \text{dom}f, -x \in \text{dom}f$ et $f(-x) = -f(x)$

A.4 Déterminer les caractéristiques par lecture graphique

On considère une fonction f dont le graphe est donné ci-dessous

a) Détermine graphiquement le domaine de f, son ensemble image, les images de -2 et 5 par f, l'ensemble des antécédents de -3 par f et l'ensemble des zéros de f.



b) Dresse le tableau de signe de f.

c) Recopie sur ta feuille et complète les phrases suivantes :

f admet un minimum en $x = -3$ car ...

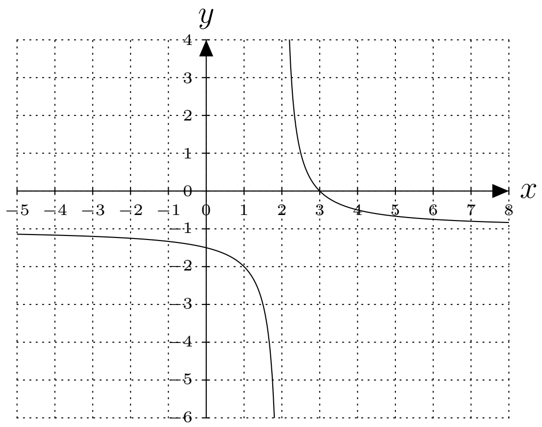
f est ...sur $[2;3]$ car ...

d) Quelles sont les valeurs de la variable pour lesquelles f admet un extremum ? Précise la valeur de cet extremum à chaque fois.

e) Dresse le tableau de variation de f.

A.5 Le graphe de la fonction g ci-dessous est une hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x-2} - 1$

a) Indique précisément **(avec justification algébrique)** :
Le domaine de g, les images de -1, 1, 5 et 7 par g, l'ordonnée à l'origine de g, l'ensemble des antécédents de -4 par g, l'ensemble des zéros de g.



b) Dessine les asymptotes au graphe de g et donne leurs équations.

c) Dresse le tableau de signe de g.

d) Complète sur ta feuille les phrases suivantes :

f est ...sur $]-\infty;2[$ car ...

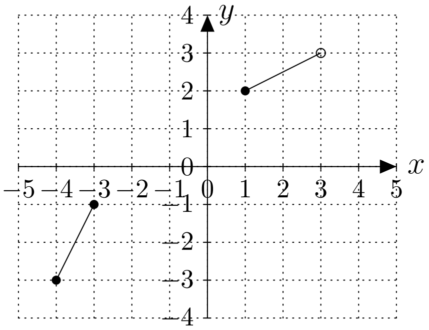
f est ...sur $]2;+\infty[$ car ...

e) Dresse le tableau de variation de f.

BONUS : Détermine l'expression de la fonction réciproque h de la fonction g. Quel est le domaine de définition de h ? Quel est l'ensemble image de g ? Quel est l'ensemble image de h ? Justifie tes réponses. Trace le graphe de h sur le même repère que celui de g.

A.6

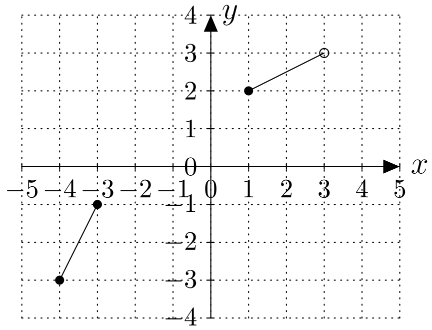
a) Complète le graphe ci-dessous pour obtenir une fonction **impaire** nommée g.



Exprime par une formulation mathématique que la fonction g est impaire.

Type de symétrie du graphe de g :

b) Complète le graphe ci-dessous pour obtenir une fonction **paire** nommée h.



Exprime par une formulation mathématique que la fonction h est paire.

Type de symétrie du graphe de h :

c) Démontre que la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x$ est impaire.

d) Démontre que la fonction définie par $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$ est paire.

A.7

a) Quelles propriétés traduisent les formulations mathématiques suivantes :

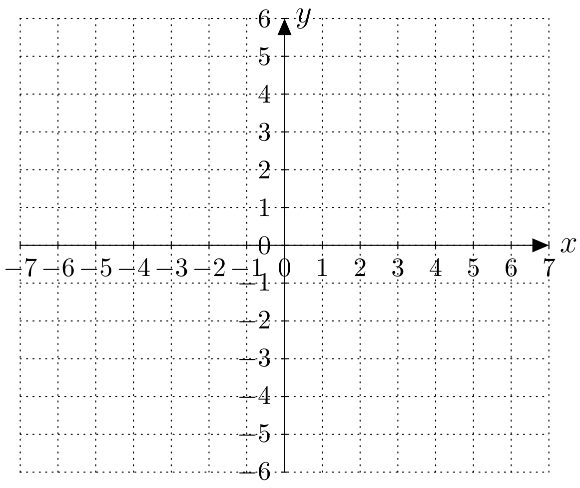
1) $\forall x_1,x_2 \in \left]-\infty;-3\right], x_1 < x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$

2) $\forall x \in \text{dom}g,\ g(x) \geq g(-3)$

3) $\forall x \in \text{dom}g,\ x \in \left]-2{,}1;-1{,}9\right[\Rightarrow g(x) \leq g(-2)$

4) $g(-2) = 1$

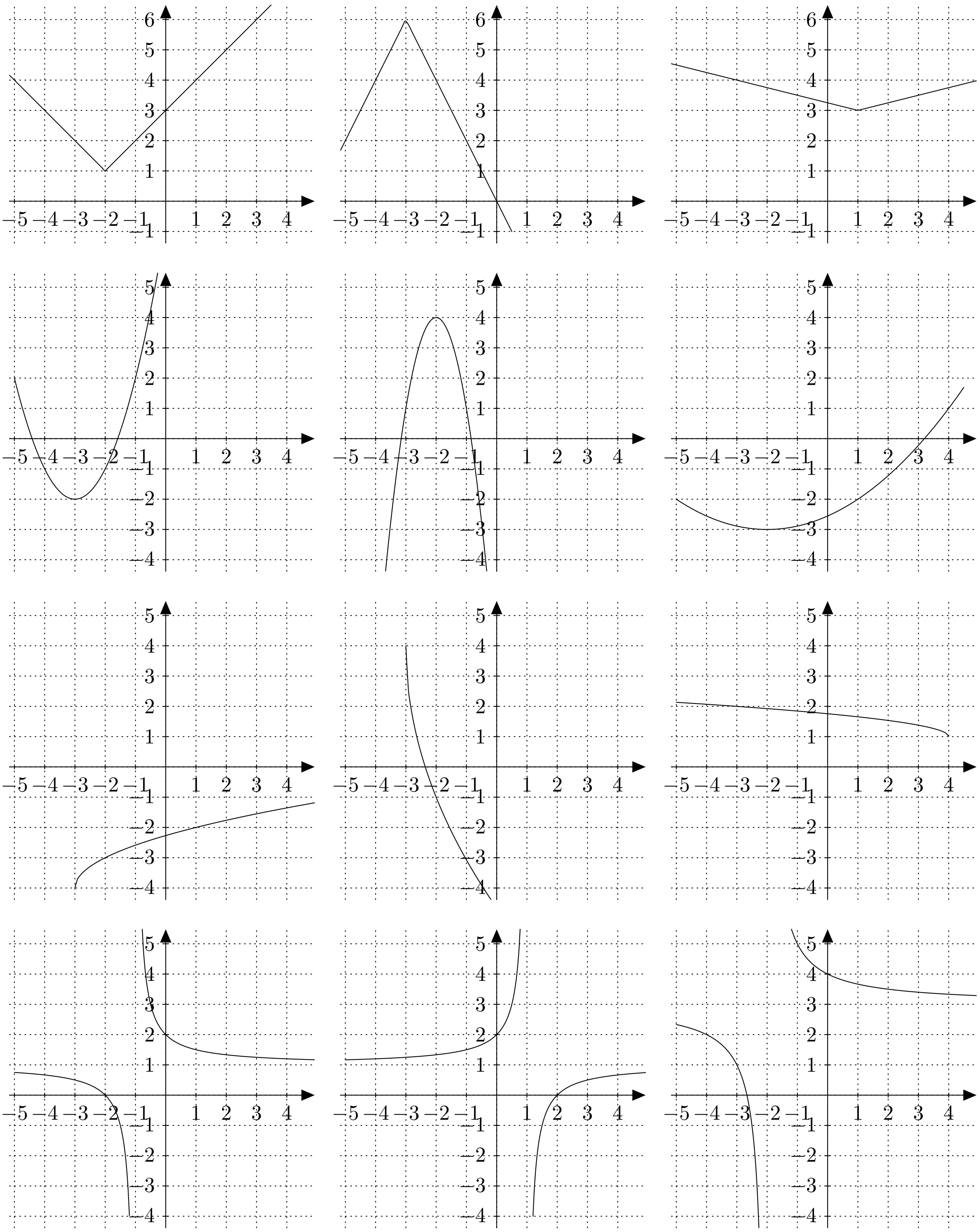
5) $\forall x \in \text{dom}f, -x \in \text{dom}g$ et $g(-x) = -g(x)$



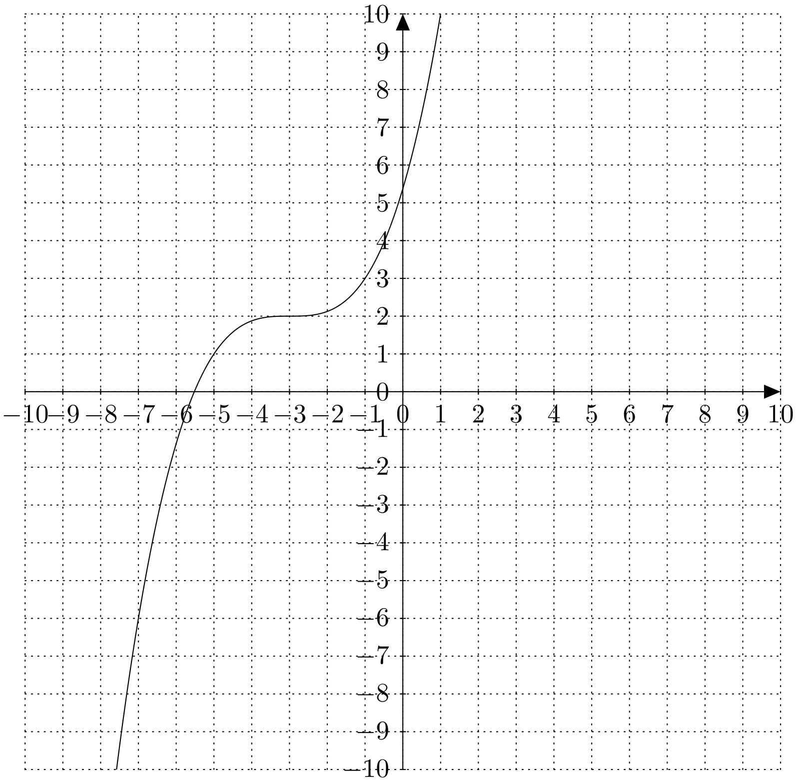
b) Dessine sur le quadrillage ci-dessus le graphe d'une fonction g qui vérifie ces cinq propriétés.

B Fonctions de réference, fonctions réciproques et transformées

B.1 **Voici quelques graphes de transformées de fonctions de référence. Pour chacune d'elles, détermine son expression algébrique. Justifie ta réponse.**



B.2 Fonctions réciproques



a) Détermine l'expression de la fonction représentée ci-contre.

b) Trace précisément le graphe de la fonction réciproque de la fonction représentée ci-contre.

c) Déduis-en l'expression de cette fonction réciproque.

d) BONUS : Retrouve l'expression de la fonction réciproque par calcul algébrique à partir de l'expression trouvée en a).

B.3 Savoirs

a) Quelles sont les fonctions de référence qui n'ont pas de fonction réciproque ? Pourquoi ?

b) Quelles sont les fonctions de référence dont le domaine de définition n'est pas $\mathbb{R}$? Pour chacune d'elle, quel est son domaine de définition ?

c) Quelles sont les fonctions de référence qui ont un point d'inflexion ? Précise ses coordonnées pour chacune d'elles.

d) Par quelle symétrie passe-t-on du graphe d'une fonction au graphe de sa réciproque (si elle existe) ?

e) Si on multiplie les abscisses des points d'un graphe par $\frac{1}{b}$ (avec $b \neq 0$), on dit qu'on a effectué un

. . . de $\frac{1}{b}$ du graphe

f) Si on multiplie les abscisses des points d'un graphe par $\frac{1}{b}$ (avec $b \neq 0$), on dit qu'on a effectué une

. . . de b du graphe.

g) Complète le tableau ci-dessous. ($a \neq 0$, $b \neq 0$)

Opération algébrique	Transformation graphique	On agit sur	Nom de la transformation graphique
$g(x) = f(x) + d$	$(x; y) \longmapsto (x; y + d)$	l'image	T. V. de d
$g(x) = f(x + c)$			
	$(x; y) \longmapsto (x; a \cdot y)$		
		la variable	E. H. de $\frac{1}{b}$

h) Une symétrie orthogonale d'axe des abscisses est un .... de -1.
i) Une symétrie orthogonale d'axe des ordonnées est un .... de -1.
j) Une multiplication par $\dfrac{1}{2}$ est une .... par 2.
k) Un étirement de $\dfrac{1}{2}$ est une .... de 2.

B.4 Résolution d'une équation du type $f(x) = k$

Dans les équations du type $\boxed{f(x) = k}$ ci-dessous :

1. Détermine l'ensemble de définition de f
2. Indique les transformations élémentaires de la fonction de référence associée pour obtenir f
3. Trace le graphe de f
4. Détermine l'ensemble image de f
5. Résous graphiquement et algébriquement les équations proposées

a) $f(x) = 1$ $\quad f(x) = -3$ $\quad f(x) = 3$ $\quad$ avec $f(x) = 2\,|x-1| - 3$

b) $f(x) = \frac{1}{2}$ $\quad f(x) = -4$ $\quad f(x) = 4$ $\quad$ avec $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{2}$

c) $f(x) = 2$ $\quad f(x) = -1$ $\quad f(x) = 3$ $\quad$ avec $f(x) = \sqrt[3]{2x} + 1$

d) $f(x) = 2$ $\quad f(x) = \frac{3}{2}$ $\quad f(x) = 0$ $\quad$ avec $f(x) = \frac{2}{(x+2)} + 1$

e) $f(x) = 3$ $\quad f(x) = 0$ $\quad f(x) = -3$ $\quad$ avec $f(x) = -\sqrt{9x+18} + 3$

f) $f(x) = -2$ $\quad f(x) = -1$ $\quad f(x) = 2$ $\quad$ avec $f(x) = \left(\frac{x}{3} - 1\right)^2 - 2$