Pour une présentation de la notion de dérivée, voir la vidéo `https://youtu.be/kxZKgQMYVAk`

1 Taux d'accroissement (ou de variation) d'une fonction

1.1 Définition du taux d'accroissement d'une fonction entre deux points de son graphe

Soit f une fonction.
Soient $A = (x_A; y_A)$ et $B = (x_B; y_B)$ deux points distincts de son graphe.

On a donc $y_A = f(x_A)$ et $y_B = f(x_B)$.

Le taux d'accroissement de f entre les points A et B est : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A}$

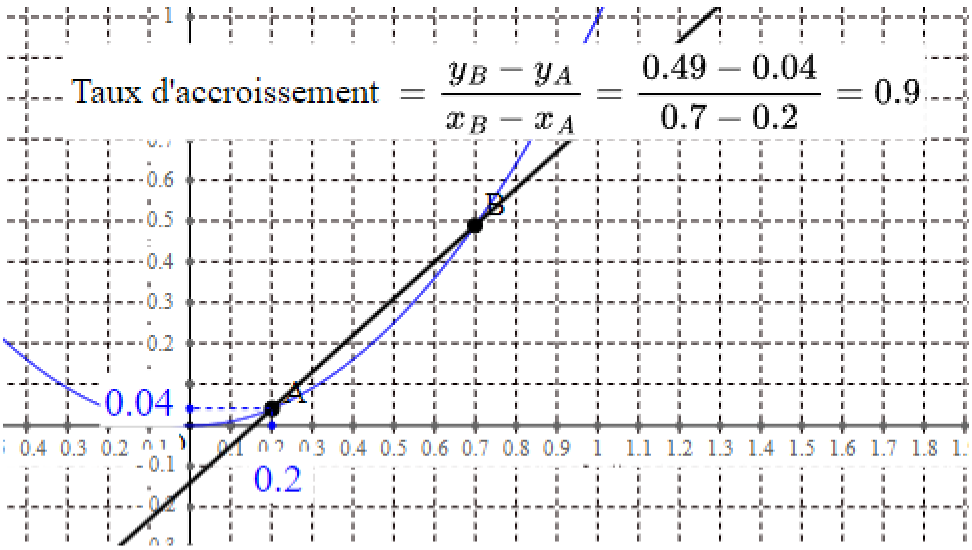
Le taux d'accroissement entre A et B est tout simplement la pente de la droite AB

1.2 Définition en utilisant $h = x_B - x_A$

On a alors $x_B = x_A + h$, et donc

Le taux d'accroissement de f entre les points A et B est : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{f(x_A + h) - f(x_A)}{h}$

1.3 Exemple avec $f(x) = x^2$, $x_A = 0{,}2$ et $h = 0{,}5$



$x_B = x_A + h = 0{,}2 + 0{,}5 = 0{,}7$ $\qquad f(0{,}2) = (0{,}2)^2 = 0{,}04$ $\qquad f(0{,}7) = (0{,}7)^2 = 0{,}49$

1.4 Définition du taux d'accroissement de f en x pour une variation h de la variable

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

On dit que le point A pour abscisse x au lieu de x_A pour simplifier les notations. L'abscisse de B est alors $x + h$. L'utilisation de h va permettre de rapprocher B de A en faisant tendre h vers 0.

2 Nombre dérivée $f'(x)$ en x d'une fonction f

2.1 Définition

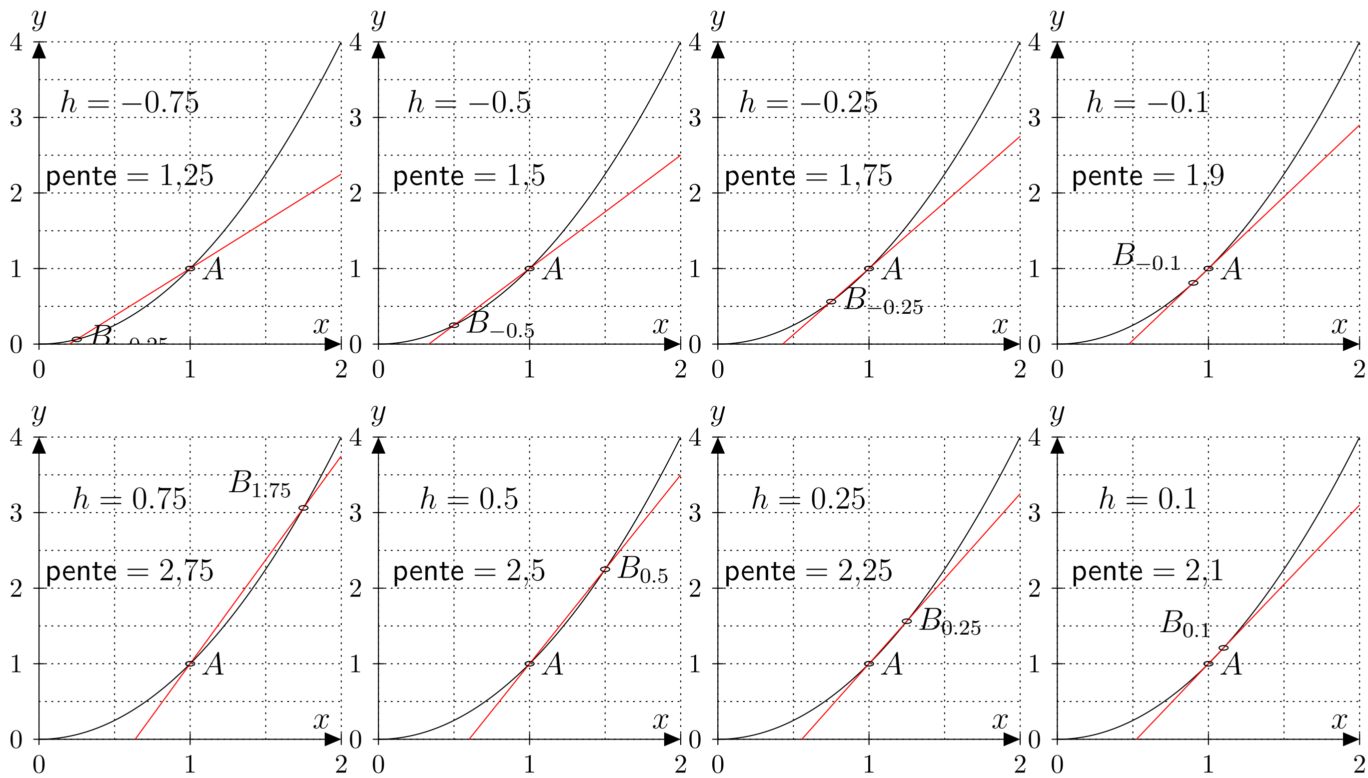
$f'(x)$ est la pente de la droite qui se rapproche le plus du graphe de f au point d'abscisse x.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad A = (x; f(x)) \text{ et } B = (x+h; f(x+h))$$

$f'(x)$ est la limite, quand h tend vers 0 (donc B se rapproche de A), de la pente de la droite AB.

f' est la fonction dérivée (ou simplement la dérivée) de f.

2.2 Exemple : $f(x) = x^2$, $A = (1; 1)$, $f'(1) = 2$



3 Calcul des dérivées

3.1 Dérivée de la fonction $f(x) = mx + p$

Le graphe de f est une droite de pente m et d'ordonnée à l'origine p.
En n'importe quel point de ce graphe (qui est une droite !), la droite qui se rapproche le plus est bien évidemment la droite elle-même. Sa pente est donc m et on a donc de façon évidente $\boxed{f'(x) = m}$

Par calcul, on peut retrouver ce résultat :

$f(x+h) = m(x+h) + p = mx + mh + p$

$f(x+h) - f(x) = mx + mh + p - (mx + p) = mh$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{mh}{h}=m \qquad \text{et} \qquad f'(x)=\lim_{h\to 0} m = m$$

On note et on retient que $\boxed{(mx+p)'=m}$

En particulier :

quand $m=0$, on a une droite horizontale de pente nulle, et $\boxed{(p)'=0}$ avec p un nombre constant.

quand $p=0$, on a une droite de pente m qui passe par l'origine du repère, et $\boxed{(mx)'=m}$.

quand $p=0$ et $m=1$, on a une droite de pente 1 qui passe par l'origine du repère, et $\boxed{(x)'=1}$.

3.2 Dérivée de la fonction $f(x)=x^2$

$f(x+h)=(x+h)^2=x^2+2xh+h^2$

$f(x+h)-f(x)=x^2+2xh+h^2-x^2=2xh+h^2$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{2xh+h^2}{h}=\frac{h(2x+h)}{h}=2x+h \qquad \text{et } f'(x)=\lim_{h\to 0} 2x+h=2x+0=2x$$

On note et on retient que $\boxed{(x^2)'=2x}$

3.3 Dérivée de la fonction $f(x)=x^3$

$f(x+h)=(x+h)^3=(x+h)(x+h)(x+h)=(x^2+2xh+h^2)(x+h)=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$

$f(x+h)-f(x)=3x^2h+3xh^2+h^3$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}=3x^2+3xh+h^2 \qquad \text{et } f'(x)=\lim_{h\to 0} 3x^2+3xh+h^2=3x^2$$

On note et on retient que $\boxed{(x^3)'=3x^2}$

3.4 Dérivée de la fonction $f(x)=\dfrac{1}{x}$

$$f(x+h)-f(x)=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}=\frac{-h}{x(x+h)}$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h}=\frac{-h}{x(x+h)}\cdot\frac{1}{h}=-\frac{1}{x(x+h)} \qquad \text{et } f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=\frac{-1}{x^2}$$

On note et on retient que $\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}}$

3.5 Dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x+h) - f(x) = \sqrt{x+h} - \sqrt{x}$

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x}}{0} = \dfrac{0}{0}$ conduit à une forme indéterminée.

On multiplie par le binôme conjugué pour lever l'indétermination.
Rappel : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \dfrac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ et $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

On note et on retient que $\boxed{(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}}$

3.6 Dérivée de la fonction $f(x) = x^n$

On utilise le produit remarquable : $a^n - b^n = (a-b) \cdot (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
Et donc :
$(x+h)^n - x^n = h((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1})$

$\dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + (x+h)^{n-3}x^2 + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}$
Et en posant $h = 0$, $f'(x) = x^{n-1} + x^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \cdots + xx^{n-2} + x^{n-1}$
Ainsi, $f'(x) = nx^{n-1}$. On note et on retient que $\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}}$
On remarque que cette formule est cohérente avec nos résultats précédents pour $n = 2$ et $n = 3$.
On remarque qu'elle fonctionne même quand $n = 0$ et $n = 1$.
$(x^0)' = 0x^{0-1} = \dfrac{0}{x} = 0$ (à condition que $x \neq 0$)
$(x^1)' = 1x^{1-1} = x^0 = 1$ (en considérant que $0^0 = 1$)
On verra en sixième qu'elle est correcte même quand n est un nombre réel (et donc aussi un rationnel) **à condition que** $x > 0$. (**Vérifiez-le avec** $n = -1$ pour $\dfrac{1}{x}$ et $n = \dfrac{1}{2}$ pour $\sqrt{x}$).

Rappel : Produit de deux puissances de même base, on additionne les exposants : $2^3 \cdot 2^4 = 2^7$
Comme $x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x^1 = x$, on en déduit que $\sqrt{x} = x^{1/2}$
Comme $x^{1/3} \cdot x^{1/3} \cdot x^{1/3} = x^1 = x$, on en déduit que $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

Rappel : Puissance d'une puissance, on multiplie les exposants : $(2^3)^4 = 2^{12}$
Exposants fractionnaires : $\sqrt[7]{x^5} = (x^5)^{\frac{1}{7}} = x^{\frac{5}{7}} = \left(x^{\frac{1}{7}}\right)^5 = (\sqrt[7]{x})^5$

4 Dérivée d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de fonctions

4.1 Dérivée d'une somme de fonctions

La dérivée d'une somme $f+g$ de fonction est égale à la somme des dérivées $f'+g'$.

$\boxed{(f+g)'=f'+g'}$

En effet, $f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x))=[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]$

La variation de $f+g$ est égale à la somme des variations de f et de g,

En divisant par h et en faisant tendre h vers 0, on obtiendra le résultat recherché.

4.2 Dérivée d'un produit de fonctions

$\boxed{(fg)'=f'g+fg'}$

En effet, $f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)=[f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)]+[f(x)g(x+h)-f(x)g(x)]$

La variation du produit fg est égale à $[f(x+h)-f(x)]\,g(x+h)+f(x)\,[g(x+h)-g(x)]$

En divisant par h et en faisant tendre h vers 0, on obtiendra le résultat recherché.

4.3 Dérivée d'un quotient de fonctions

$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}}$

On écrit que $f=\frac{f}{g}g$ et on utilise la formule du produit : $\left(\frac{f}{g}g\right)'=\left(\frac{f}{g}\right)'g+\frac{f}{g}g'$

On obtient donc que $\left(\frac{f}{g}\right)'g+\frac{f}{g}g'=f' \Leftrightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'g=f'-\frac{f}{g}g' \Leftrightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$

5 Dérivée d'une fonction composée

5.1 Composée $f\circ g$ de deux fonctions f et g

Par exemple si $f(x)=x^2$ et $g(x)=2x-3$, la composée de f et g, notée $f\circ g$ est définie par :

$$f\circ g(x)=f(g(x))=f(2x-3)=(2x-3)^2$$

On a aussi $g\circ f(x)=g(f(x))=g(x^2)=2x^2-3$

Autre exemple : l'expression $\frac{1}{x^3-2x^2-5}$, on peut poser $f(x)=\frac{1}{x}$ et $g(x)=x^3-2x^2-5$.

On a alors $f\circ g(x)=f(g(x))=f(x^3-2x^2-5)=\frac{1}{x^3-2x^2-5}$

5.2 Dérivée d'une fonction composée

$\boxed{(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)}$

En effet : $\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h}=\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$

6 Variations d'une fonction

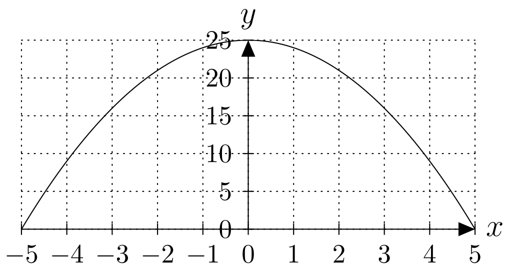
6.1 Lien entre le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée

Soit $M = (x; y)$ un point du graphe de f.

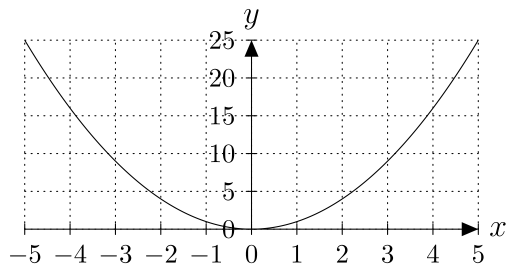
Si $\boxed{f'(x) > 0}$, cela signifie qu'au voisinage de M, la droite qui se rapproche le plus du graphe de f est une droite de **pente positive**, donc **la fonction est croissante** à cet endroit.

Au contraire si $\boxed{f'(x) < 0}$, cela signifie qu'au voisinage de M, la droite qui se rapproche le plus du graphe de f est une droite de **pente négative**, donc **la fonction est décroissante** à cet endroit.

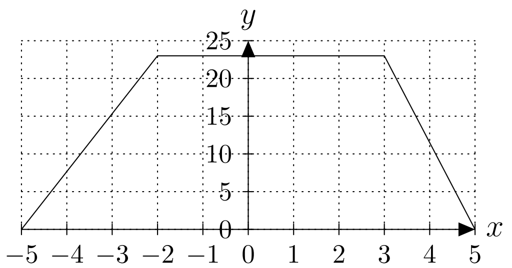
Si $\boxed{f'(x) = 0}$, cela signifie qu'au point du graphe d'abscisse x, la droite qui se rapproche le plus du graphe de f est une droite horizontale. Cela peut correspondre à plusieurs situations comme le montrent les exemples suivants.



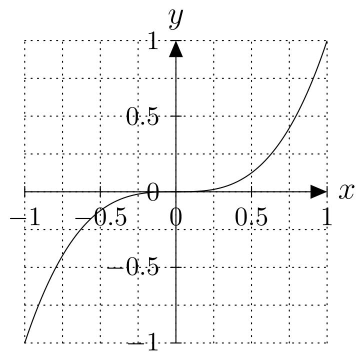
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	25	$\searrow$	$-\infty$



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



x	-5		-2		3		5
f'		$+$	‖	0	‖	$-$	
f	0	$\nearrow$	23	$\longrightarrow$	23	$\searrow$	0



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$