Transformations des fonctions de référence

1 Les 4 transformations élémentaires

1.1 Au niveau des expressions algébriques

Quatre opérations algébriques élémentaires permettent d'obtenir une nouvelle fonction g à partir d'une fonction de référence f tout en conservant l'essentiel de ses propriétés.
On peut agir soit sur **l'image** $f(x)$, soit sur **la variable** x et on peut soit **additionner un nombre**, soit **multiplier par un nombre**.
Considérons 4 nombres a, b, c et d **non nuls**, on obtient les 4 possibilités suivantes :

	Additionner un nombre	Multiplier par un nombre
Image	$g(x) = f(x) + d$	$g(x) = a \cdot f(x)$
Variable	$g(x) = f(x + c)$	$g(x) = f(b \cdot x)$

1.2 Au niveau des graphes

Les quatre opérations algébriques élémentaires sont chacune associées à une transformation géométrique élémentaire du graphique de la fonction. Une **translation T** quand on additionne un nombre, un **étirement E** quand on multiplie. La direction de la transformation est **verticale V** quand l'opération algébrique est effectuée sur l'image ou **horizontale H** quand elle est effectuée sur la variable.

	Translation	Etirement
Ordonnée	T.V. de d $(x; y)$ devient $(x; y + d)$	E.V. de facteur a $(x; y)$ devient $(x; a \cdot y)$
Abscisse	T.H. de $-c$ $(x; y)$ devient $(x - c; y)$	E.H. de facteur $\frac{1}{b}$ $(x; y)$ devient $(\frac{x}{b}; y)$

1.3 Synthèse

Opération algébrique		Transformation graphique	
On ajoute d à l'image	$g(x) = f(x) + d$	$(x; y) \longmapsto (x; y + d)$	T. V. de d
On ajoute c à la variable	$g(x) = f(x + c)$	$(x; y) \longmapsto (x - c; y)$	T. H. de $-c$
On multiplie l'image par a	$g(x) = a \cdot f(x)$	$(x; y) \longmapsto (x; a \cdot y)$	E. V. de a
On multiplie la variable par b	$g(x) = f(b \cdot x)$	$(x; y) \longmapsto (\frac{x}{b}; y)$	E. H. de $\frac{1}{b}$

Cas particuliers des symétries orthogonales

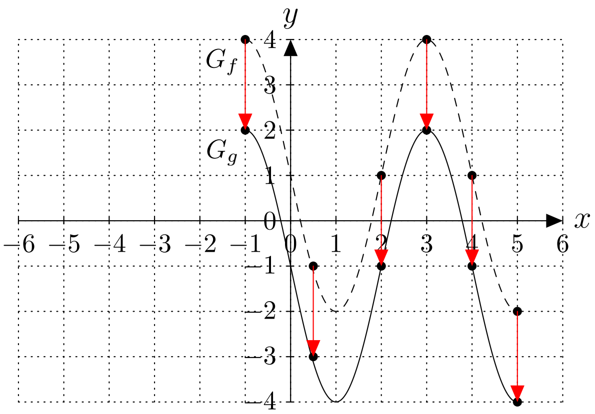
On multiplie l'image par -1	$g(x) = -f(x)$	$(x; y) \longmapsto (x; -y)$	S.O. d'axe Ox
On multiplie la variable par -1	$g(x) = f(-x)$	$(x; y) \longmapsto (-x; y)$	S.O. d'axe Oy

2 Translations

2.1 Additionner un nombre d à l'image : $g(x) = f(x) + d$

Posons $y = f(x)$. Cette égalité signifie que le point $(x; y) \in G_f$.

Comme $g(x) = f(x) + d = y + d$, on obtient que $\boxed{(x; y) \in G_f \Leftrightarrow (x; y + d) \in G_g}$.



Transformation algébrique : $g(x) = f(x) - 2$

$(x; y) \in G_f$ devient $(x; y - 2) \in G_g$

Transformation géométrique : **T. V. de** -2

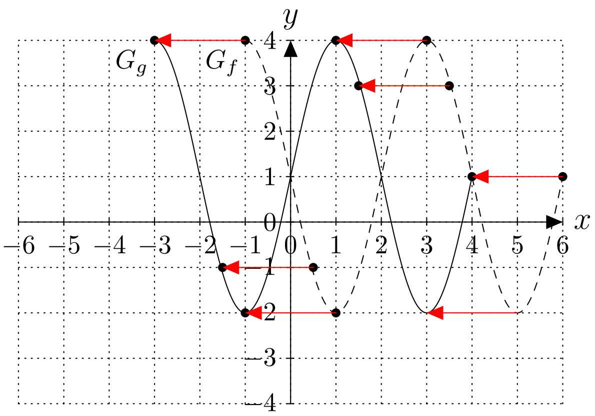
dom$f = [-1; 5]$ reste dom$g = [-1; 5]$

im$f = [-2; 4]$ devient im$g = [-4; 2]$

2.2 Additionner un nombre c à la variable : $g(x) = f(x + c)$

Posons $y = g(x) = f(x + c)$, on obtient que $(x + c; y) \in G_f \Leftrightarrow (x; y) \in G_g$

Cette équivalence s'écrit encore $\boxed{(x; y) \in G_f \Leftrightarrow (x - c; y) \in G_g}$



Transformation algébrique : $g(x) = f(x + 2)$

$(x; y) \in G_f$ devient $(x - 2; y) \in G_g$

Transformation géométrique : **T. H. de** -2

dom$f = [-1; 6]$ devient dom$g = [-3; 4]$

im$f = [-2; 4]$ reste im$g = [-2; 4]$

3 Affinités

Les **affinités** que nous allons découvrir ci-dessous peuvent aussi être appelées **dilatations** ou **étirements**. Nous utiliserons le mot **étirement**.

Un **Étirement Vertical de facteur** k signifie que $(x; y)$ devient $(x; k \cdot y)$.

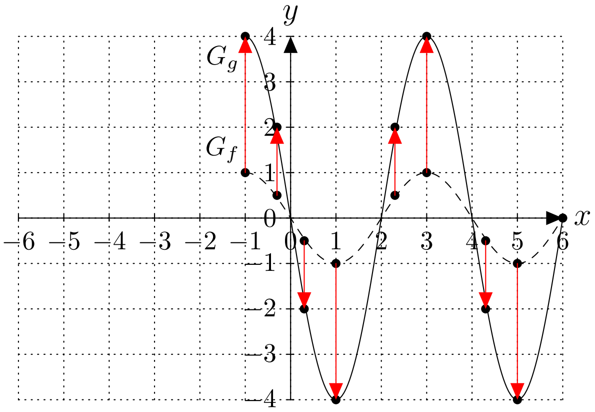
Un **Étirement Horizontal de facteur** k signifie que $(x; y)$ devient $(k \cdot x; y)$.

Un étirement de $\dfrac{1}{k}$ pourrait aussi être appelé une **compression** de k.

(de même qu'une multiplication par $\dfrac{1}{k}$ s'appelle aussi une **division** par k)

3.1 Multiplication par a de l'image : $g(x) = a \cdot f(x)$

Posons $y = f(x)$. Rappelons que cette égalité signifie que le point $(x; y) \in G_f$.
L'égalité $g(x) = a \cdot f(x) = a \cdot y$ signifie que $\boxed{(x; y) \in G_f \Leftrightarrow (x; a \cdot y) \in G_g}$.



Transformation algébrique : $g(x) = 4 \cdot f(x)$

$(x; y) \in G_f$ devient $(x; 4 \cdot y) \in G_g$

Transformation géométrique : **E. V. de** 4

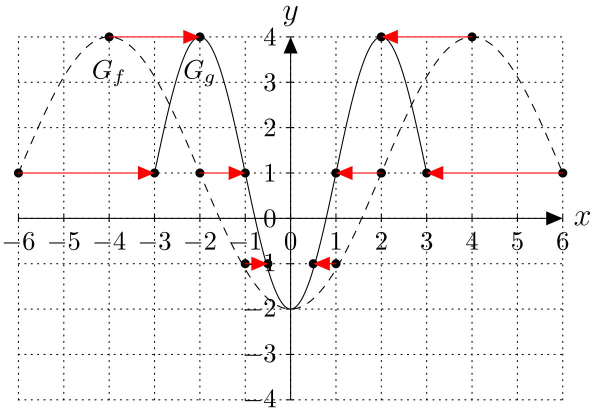
dom$f = [-1; 6]$ reste dom$g = [-1; 6]$

im$f = [-1; 1]$ devient im$g = [-4; 4]$

3.2 Multiplication par b de la variable : $g(x) = f(b \cdot x)$

Posons $y = g(x) = f(b \cdot x)$, on obtient que $(b \cdot x; y) \in G_f \Leftrightarrow (x; y) \in G_g$

Cette équivalence s'écrit encore $\boxed{(x; y) \in G_f \Leftrightarrow (\frac{x}{b}; y) \in G_g}$



Transformation algébrique : $g(x) = f(2 \cdot x)$

$(x; y) \in G_f$ devient $\left(\frac{x}{2}; y\right) \in G_g$

Transformation géométrique : **E. H. de** $\frac{1}{2}$

dom$f = [-6; 6]$ devient dom$g = [-3; 3]$

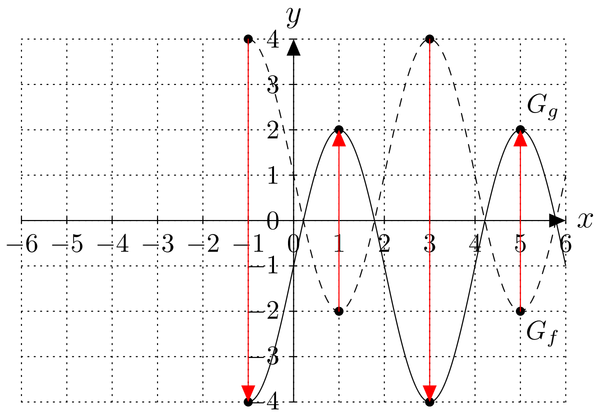
im$f = [-2; 4]$ reste im$g = [-2; 4]$

Remarquons qu'un **étirement de facteur** $\frac{1}{2}$ est une **compression de facteur** 2.
Il est souvent plus pratique lorsqu'on multiplie la variable par b de dire qu'on effectue une compression horizontale (C.H.) de b plutôt qu'un étirement horizontal (E.H.) de $\frac{1}{b}$.

4 Cas particuliers des symétries orthogonales

4.1 Multiplication par -1 de l'image : $g(x) = -f(x)$

La transformation géométrique associée à la multiplication par -1 de l'image est un étirement vertical de -1, donc une multiplication par -1 des ordonnées, donc une **symétrie orthogonale d'axe** Ox, l'axe horizontal des abscisses.



Transformation algébrique : $\boxed{g(x) = -f(x)}$

$(x; y) \in G_f$ devient $(x; -y) \in G_g$

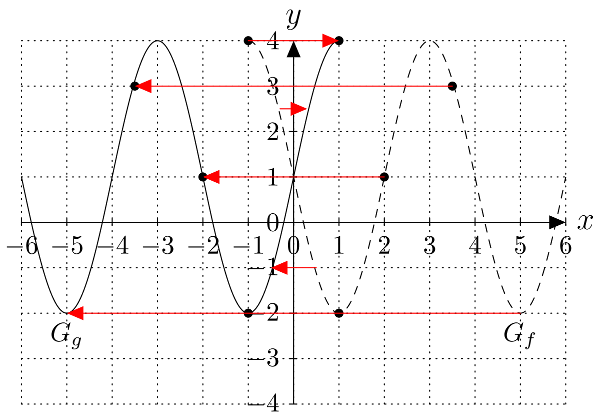
Transformation géométrique :
Symétrie Orthogonale d'axe Ox

dom$f = [-1; +\infty[$ reste dom$g = [-1; +\infty[$

im$f = [-2; 4]$ devient im$g = [-4; 2]$

4.2 Multiplication par -1 de la variable : $g(x) = f(-x)$

La transformation géométrique associée à la multiplication par -1 de la variable est un étirement horizontal de $\dfrac{1}{-1} = -1$, donc une multiplication par -1 des abscisses, donc une **symétrie orthogonale d'axe** Oy, l'axe vertical des ordonnées.



Transformation algébrique : $\boxed{g(x) = f(-x)}$

$(x; y) \in G_f$ devient $(-x; y) \in G_g$

Transformation géométrique :
Symétrie Orthogonale d'axe Oy

dom$f = [-1; +\infty[$ devient dom$g =]-\infty; 1]$

im$f = [-2; 4]$ reste im$g = [-2; 4]$

5 Composition de transformations élémentaires : exemples

« T.V. de 2 puis E.V. de 3 » est identique à « E.V. de 3 puis T.V. de 6 »

$f(x) \longmapsto f(x) + 2 \longmapsto 3 \cdot (f(x) + 2) = 3 \cdot f(x) + 6$

$f(x) \longmapsto 3 \cdot f(x) \longmapsto 3 \cdot f(x) + 6$

La composition d'une translation et d'un étirement **dans une même direction** n'est pas commutative.

De même, **« T.H. de -4 puis C.H. de 2 » est identique à « C.H. de 2 puis T.H. de -2 »**

$f(x) \longmapsto f(x+4) \longmapsto f(2x+4)) = f(2x+4) = f(2(x+2))$

$f(x) \longmapsto f(2x) \longmapsto f(2(x+2))$ (On multiplie la variable par 2 puis on lui ajoute -(-2)=2)

Les étirements devront TOUJOURS être effectués AVANT les translations

Les étirements modifieront la forme du graphique de la fonction de référence sans déplacer son point particulier de coordonnées $(0{,}0)$ (les étirements correspondent à des multiplications sur les coordonnées, et la multiplication par 0 donne toujours 0).

Puis, après avoir obtenu la forme désirée du graphique, les translations permettront de positionner correctement ce point particulier et donc le graphe final de la transformée.