

Transformations des fonctions de référence

1 Les 4 transformations élémentaires**1.1 Au niveau des expressions algébriques**

Quatre opérations algébriques élémentaires permettent d'obtenir une nouvelle fonction g à partir d'une fonction de référence f tout en conservant l'essentiel de ses propriétés.

On peut agir soit sur **l'image** $f(x)$, soit sur **la variable** x et on peut soit **additionner un nombre**, soit **multiplier par un nombre**.

Considérons 4 nombres a , b , c et d **non nuls**, on obtient les 4 possibilités suivantes :

	Additionner un nombre	Multiplier par un nombre
Image	$g(x) = f(x) + d$	$g(x) = a \cdot f(x)$
Variable	$g(x) = f(x + c)$	$g(x) = f(b \cdot x)$

1.2 Au niveau des graphes

Les quatre opérations algébriques élémentaires sont chacune associées à une transformation géométrique élémentaire du graphique de la fonction. Une **translation T** quand on additionne un nombre, un **étirement E** quand on multiplie. La direction de la transformation est **verticale V** quand l'opération algébrique est effectuée sur l'image ou **horizontale H** quand elle est effectuée sur la variable.

	Translation	Etirement
Ordonnée	T.V. de d $(x; y)$ devient $(x; y + d)$	E.V. de facteur a $(x; y)$ devient $(x; a \cdot y)$
Abscisse	T.H. de $-c$ $(x; y)$ devient $(x - c; y)$	E.H. de facteur $\frac{1}{b}$ $(x; y)$ devient $(\frac{x}{b}; y)$

1.3 Synthèse

Opération algébrique	Transformation graphique		
On ajoute d à l'image	$g(x) = f(x) + d$	$(x; y) \mapsto (x; y + d)$	T. V. de d
On ajoute c à la variable	$g(x) = f(x + c)$	$(x; y) \mapsto (x - c; y)$	T. H. de $-c$
On multiplie l'image par a	$g(x) = a \cdot f(x)$	$(x; y) \mapsto (x; a \cdot y)$	E. V. de a
On multiplie la variable par b	$g(x) = f(b \cdot x)$	$(x; y) \mapsto (\frac{x}{b}; y)$	E. H. de $\frac{1}{b}$

Cas particuliers des symétries orthogonales

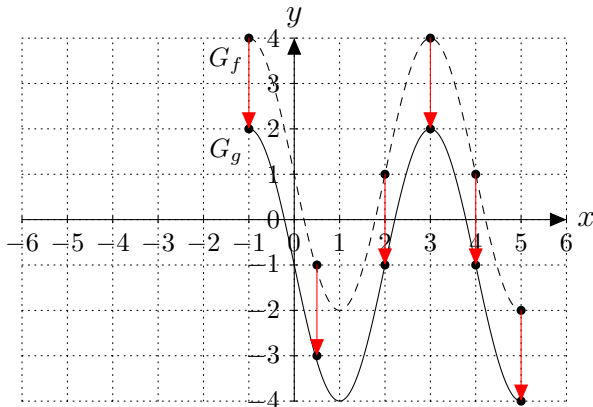
On multiplie l'image par -1	$g(x) = -f(x)$	$(x; y) \mapsto (x; -y)$	S.O. d'axe Ox
On multiplie la variable par -1	$g(x) = f(-x)$	$(x; y) \mapsto (-x; y)$	S.O. d'axe Oy

2 Translations

2.1 Additionner un nombre d à l'image : $g(x) = f(x) + d$

Posons $y = f(x)$. Cette égalité signifie que le point $(x; y) \in G_f$.

Comme $g(x) = f(x) + d = y + d$, on obtient que $(x; y) \in G_f \Leftrightarrow (x; y + d) \in G_g$.



Transformation algébrique : $g(x) = f(x) - 2$

$(x; y) \in G_f$ devient $(x; y - 2) \in G_g$

Transformation géométrique : **T. V. de -2**

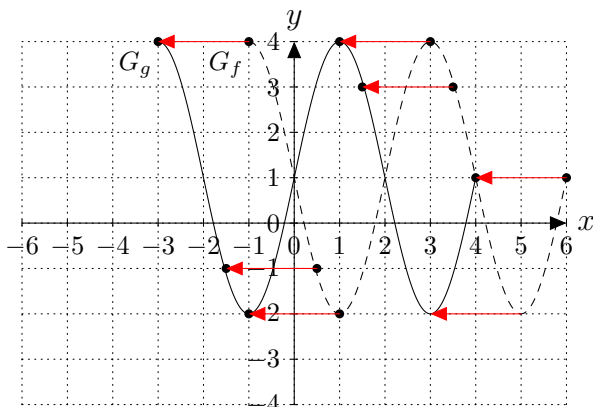
$\text{dom } f = [-1; 5]$ reste $\text{dom } g = [-1; 5]$

$\text{im } f = [-2; 4]$ devient $\text{im } g = [-4; 2]$

2.2 Additionner un nombre c à la variable : $g(x) = f(x + c)$

Posons $y = g(x) = f(x + c)$, on obtient que $(x + c; y) \in G_f \Leftrightarrow (x; y) \in G_g$

Cette équivalence s'écrit encore $(x; y) \in G_f \Leftrightarrow (x - c; y) \in G_g$



Transformation algébrique : $g(x) = f(x + 2)$

$(x; y) \in G_f$ devient $(x - 2; y) \in G_g$

Transformation géométrique : **T. H. de -2**

$\text{dom } f = [-1; 6]$ devient $\text{dom } g = [-3; 4]$

$\text{im } f = [-2; 4]$ reste $\text{im } g = [-2; 4]$

3 Affinités

Les **affinités** que nous allons découvrir ci-dessous peuvent aussi être appelées **dilatations** ou **étirements**. Nous utiliserons le mot **étirement**.

Un **Étirement Vertical de facteur k** signifie que $(x; y)$ devient $(x; k \cdot y)$.

Un **Étirement Horizontal de facteur k** signifie que $(x; y)$ devient $(k \cdot x; y)$.

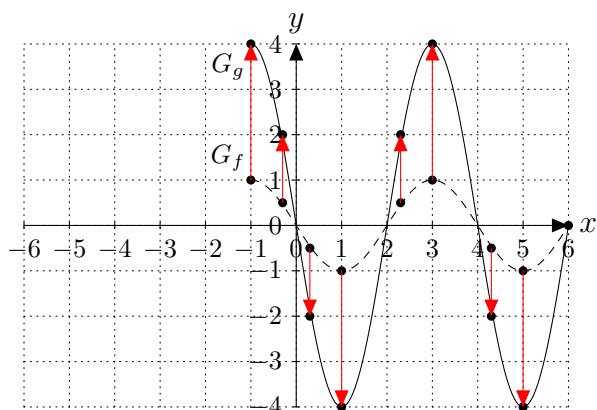
Un étirement de $\frac{1}{k}$ pourrait aussi être appelé une **compression** de k .

(de même qu'une multiplication par $\frac{1}{k}$ s'appelle aussi une **division** par k)

3.1 Multiplication par a de l'image : $g(x) = a \cdot f(x)$

Posons $y = f(x)$. Rappelons que cette égalité signifie que le point $(x; y) \in G_f$.

L'égalité $g(x) = a \cdot f(x) = a \cdot y$ signifie que $(x; y) \in G_f \Leftrightarrow (x; a \cdot y) \in G_g$.



Transformation algébrique : $g(x) = 4 \cdot f(x)$

$(x; y) \in G_f$ devient $(x; 4 \cdot y) \in G_g$

Transformation géométrique : **E. V. de 4**

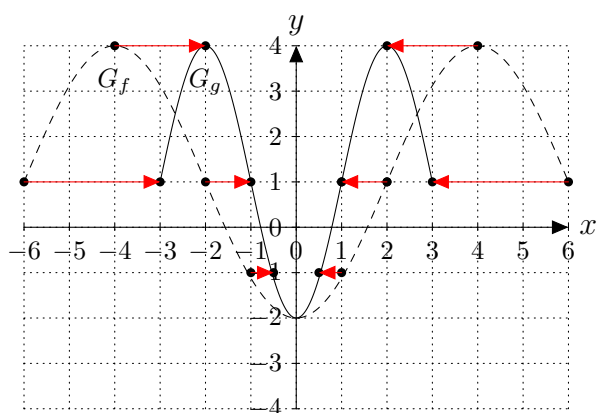
$\text{dom } f = [-1; 6]$ reste $\text{dom } g = [-1; 6]$

$\text{im } f = [-1; 1]$ devient $\text{im } g = [-4; 4]$

3.2 Multiplication par b de la variable : $g(x) = f(b \cdot x)$

Posons $y = g(x) = f(b \cdot x)$, on obtient que $(b \cdot x; y) \in G_f \Leftrightarrow (x; y) \in G_g$

Cette équivalence s'écrit encore $(x; y) \in G_f \Leftrightarrow (\frac{x}{b}; y) \in G_g$



Transformation algébrique : $g(x) = f(2 \cdot x)$

$(x; y) \in G_f$ devient $(\frac{x}{2}; y) \in G_g$

Transformation géométrique : **E. H. de $\frac{1}{2}$**

$\text{dom } f = [-6; 6]$ devient $\text{dom } g = [-3; 3]$

$\text{im } f = [-2; 4]$ reste $\text{im } g = [-2; 4]$

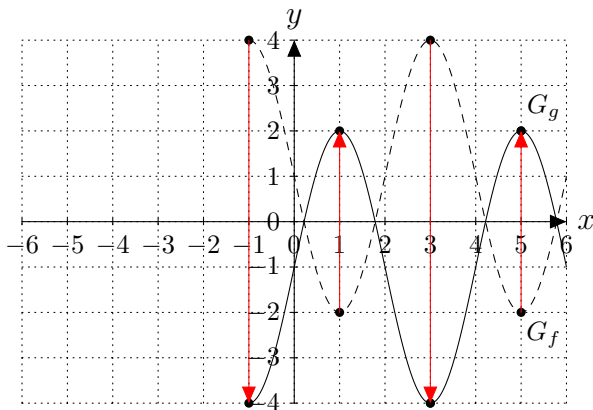
Remarquons qu'un **étirement de facteur $\frac{1}{2}$** est une **compression de facteur 2**.

Il est souvent plus pratique lorsqu'on multiplie la variable par b de dire qu'on effectue une compression horizontale (C.H.) de b plutôt qu'un étirement horizontal (E.H.) de $\frac{1}{b}$.

4 Cas particuliers des symétries orthogonales

4.1 Multiplication par -1 de l'image : $g(x) = -f(x)$

La transformation géométrique associée à la multiplication par -1 de l'image est un étirement vertical de -1 , donc une multiplication par -1 des ordonnées, donc une **symétrie orthogonale d'axe Ox** , l'axe horizontal des abscisses.



Transformation algébrique : $g(x) = -f(x)$

$(x; y) \in G_f$ devient $(x; -y) \in G_g$

Transformation géométrique :

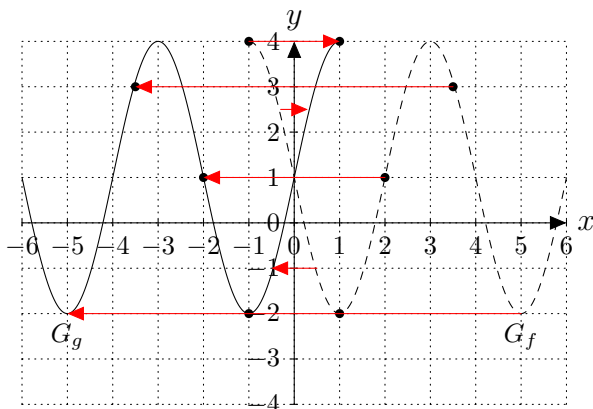
Symétrie Orthogonale d'axe Ox

$\text{dom } f = [-1; +\infty[$ reste $\text{dom } g = [-1; +\infty[$

$\text{im } f = [-2; 4]$ devient $\text{im } g = [-4; 2]$

4.2 Multiplication par -1 de la variable : $g(x) = f(-x)$

La transformation géométrique associée à la multiplication par -1 de la variable est un étirement horizontal de $\frac{1}{-1} = -1$, donc une multiplication par -1 des abscisses, donc une **symétrie orthogonale d'axe Oy** , l'axe vertical des ordonnées.



Transformation algébrique : $g(x) = f(-x)$

$(x; y) \in G_f$ devient $(-x; y) \in G_g$

Transformation géométrique :

Symétrie Orthogonale d'axe Oy

$\text{dom } f = [-1; +\infty[$ devient $\text{dom } g =]-\infty; 1]$

$\text{im } f = [-2; 4]$ reste $\text{im } g = [-2; 4]$

5 Composition de transformations élémentaires : exemples

« T.V. de 2 puis E.V. de 3 » est identique à « E.V. de 3 puis T.V. de 6 »

$$f(x) \mapsto f(x) + 2 \mapsto 3 \cdot (f(x) + 2) = 3 \cdot f(x) + 6$$

$$f(x) \mapsto 3 \cdot f(x) \mapsto 3 \cdot f(x) + 6$$

La composition d'une translation et d'un étirement **dans une même direction** n'est pas commutative.

De même, « T.H. de -4 puis C.H. de 2 » est identique à « C.H. de 2 puis T.H. de -2 »

$$f(x) \mapsto f(x + 4) \mapsto f(2x + 4) = f(2(x + 2))$$

$$f(x) \mapsto f(2x) \mapsto f(2(x + 2)) \quad (\text{On multiplie la variable par 2 puis on lui ajoute } -(-2)=2)$$

Les étirements devront TOUJOURS être effectués AVANT les translations

Les étirements modifieront la forme du graphique de la fonction de référence sans déplacer son point particulier de coordonnées (0,0) (les étirements correspondent à des multiplications sur les coordonnées, et la multiplication par 0 donne toujours 0).

Puis, après avoir obtenu la forme désirée du graphique, les translations permettront de positionner correctement ce point particulier et donc le graphe final de la transformée.