Secondaire-SecondDegré

Ophysis.net

Fonctions et équations du second degré

1 Expression développée : $ax^2 + bx + c$

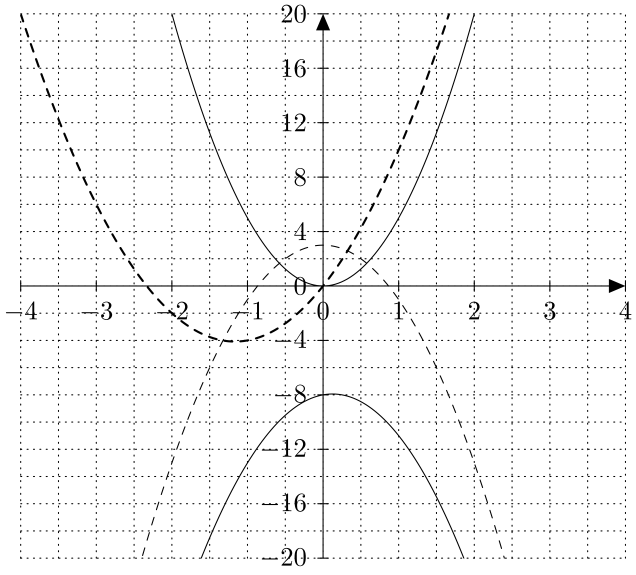
1.1 Définition d'une fonction du second degré

Une fonction est du second degré quand son expression peut s'écrire sous la **forme développée** $\boxed{ax^2 + bx + c \text{ avec } a \neq 0}$. Si $a = 0$, il s'agit d'une fonction du premier degré, pas du deuxième degré.
x est la **variable** de la fonction.
a, b et c sont trois nombres **constants** (fixés), appelés **paramètres**.

1.2 Exemples

Exemples d'expressions développées de fonctions du second degré de la variable x et leurs graphiques : associe graphiques et expressions.

$5x^2$	a=5	b=0	c=0
$-4x^2 + 3$	a=-4	b=0	c=3
$3x^2 + 7x$	a=3	b=7	c=0
$x - 8 - 4x^2$	a=-4	b=1	c=-8



2 Expression canonique : $a(x - x_S)^2 + y_S$

2.1 Propriété

L'expression d'une fonction f du second degré peut **toujours** s'écrire sous la **forme canonique** :
$\boxed{f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S \text{ avec } a \neq 0}$.

On peut remarquer que $f(x_S) = a(x_S - x_S)^2 + y_S = a \cdot 0^2 + y_S = y_S$.
On vérifie ainsi que le point de coordonnées $(x_S; y_S)$ est bien sur le graphe de f.

2.2 Passage de l'expression canonique à l'expression développée

Il suffit de développer l'expression canonique.
Par exemple, avec $a = 4$, $x_S = 3$ et $y_S = 7$:
$4(x-3)^2 + 7 = 4(x^2 - 6x + 9) + 7 = 4x^2 - 24x + 36 + 7 = 4x^2 - 24x + 43$

De façon générale :
$a(x - x_S)^2 + y_S = a(x^2 - 2{\bullet}x_S{\bullet}x + x_S^2) + y_S = ax^2 - 2ax_Sx + ax_S^2 + y_S = ax^2 + bx + c$
On en déduit par identification que $\boxed{b = -2ax_S}$ et $c = ax_S^2 + y_S = f(0)$
On vérifie ainsi que toute fonction d'expression $a(x - x_S)^2 + y_S$ peut aussi s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c$. Il s'agit bien d'une fonction du second degré.

2.3 Passage de la forme développée à la forme canonique

On suppose qu'on connaît la forme développée $f(x) = ax^2 + bx + x$ d'une fonction f du second degré, on veut trouver sa forme canonique $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$.

La première équation permet de trouver que $b = -2ax_S$, on en déduit que $\boxed{x_S = -\dfrac{b}{2a}}$.

On a déjà remarqué que $f(x_S) = a(x_S - x_S)^2 + y_S = a \cdot 0^2 + y_S = y_S$
Donc, $y_S = ax_S^2 + bx_S + c = a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\dfrac{b}{2a}\right) + c = \dfrac{ab^2 - 2b^2a + 4a^2c}{4a^2} = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$

On trouve que $y_S = -\dfrac{\Delta}{4a}$ avec $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ deuxième formule à connaître par cœur.

2.4 Méthode pour trouver la forme canonique à partir de la forme développée

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ la forme développée.
On cherche x_S et y_S tels que : $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$.
x_S **s'obtient par la formule :** $x_S = -\frac{b}{2a}$.
Puis on calcule $y_S = f(x_S) = ax_S^2 + bx_S + c$

Exemple : Mettre sous forme canonique l'expression de la fonction g définie par $g(x) = 2x^2 + 3x + 4$
On a $x_S = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2{\bullet}2} = -\frac{3}{4}$
Puis $y_S = g(x_S) = 2\frac{9}{16} + 3(-\frac{3}{4}) + 4 = \frac{9}{8} - \frac{18}{8} + \frac{32}{8} = \frac{23}{8}$.
Ainsi, $g(x) = 2x^2 + 3x + 4 = 2(x + \frac{3}{4})^2 + \frac{23}{8}$

3 Graphes des fonctions du second degré

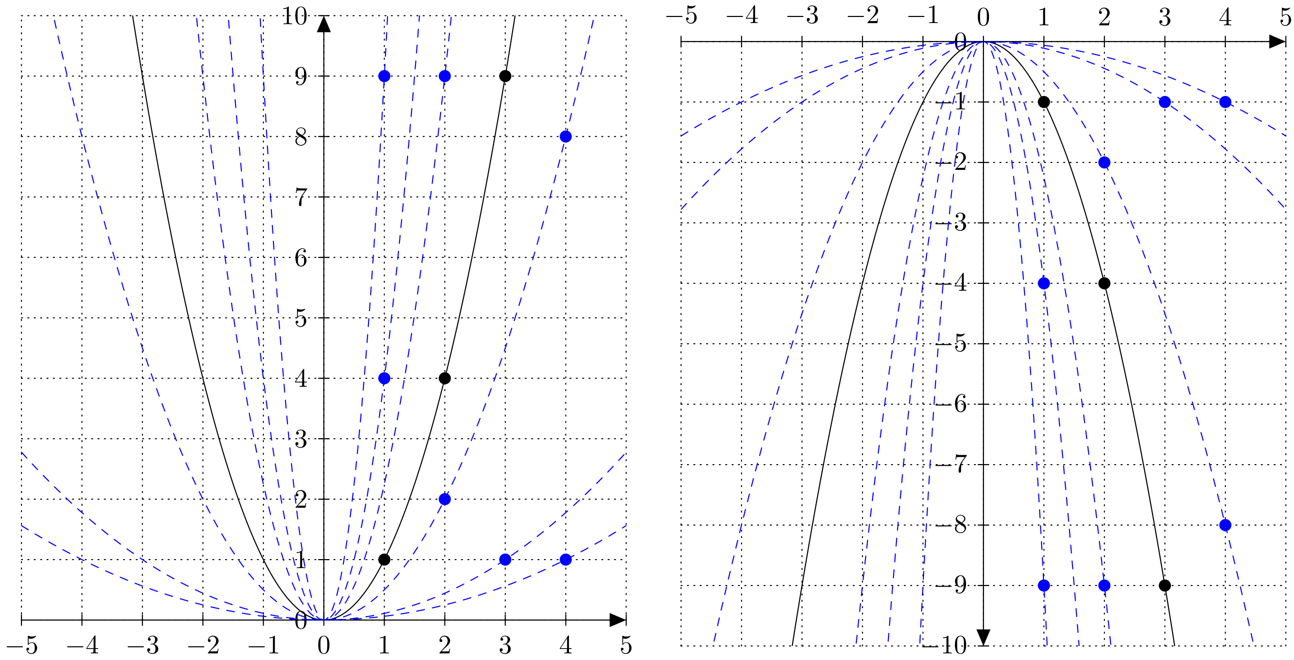
3.1 De la fonction carré x^2 à la fonction du second degré $a(x - x_S)^2 + y_S$

Puisque **toute fonction du second degré** peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$, on en déduit que **toutes les fonctions du second degré** peuvent s'obtenir à partir de la fonction carré d'expression x^2 en appliquant les transformations élémentaires suivantes dans cet ordre :
$x^2 \underset{\text{E.V. de a}}{\longmapsto} ax^2 \underset{\text{T.H. de } x_S}{\longmapsto} a(x - x_S)^2 \underset{\text{T.V. de } y_S}{\longmapsto} a(x - x_S)^2 + y_S$.

Le graphe d'une fonction du second degré s'appelle **une parabole**.
Il possède un point particulier appelé le sommet S de la parabole.
Ce point a pour coordonnées $(0;0)$ pour la fonction de référence $f(x) = x^2$.

3.2 Graphes des fonctions du second degré de la forme ax^2

Les coordonnées du sommet S ne sont pas modifiées par l'étirement vertical de a car la multiplication de son ordonnée par a donne $(0;0 \cdot a) = (0;0)$ pour les coordonnées du point correspondant sur le graphe de la transformée.
Ainsi, toute fonction d'expression ax^2 a son sommet en $(0;0)$.
Si $a < 0$ alors $ax^2 \leq 0$, le maximum 0 est obtenu au sommet de la parabole, d'abscisse 0.
Si $a > 0$ alors $ax^2 \geq 0$, le minimum 0 est obtenu au sommet de la parabole, d'abscisse 0.



Détermine les valeurs de a pour chacun des graphes ci-dessus.
Puisque $(kx)^2 = k^2x$ toute compression horizontale de k de la fonction carré correspond à un étirement vertical de k^2.
Réciproquement, on peut vérifier sur les graphiques ci-dessus que
Si $a > 0$, l'étirement vertical de a correspond à une compression horizontale de $\sqrt{a}$.
Si $a < 0$, l'étirement vertical de a correspond à une symétrie orthogonale d'axe Ox (étirement vertical de -1) suivi d'une compression horizontale de $\sqrt{-a}$.

3.3 Graphes des fonctions du second degré de la forme $a(x - x_S)^2$

Ils s'obtiennent à partir de ceux de ax^2 par une translation horizontale de x_S. Le sommet $(0;0)$ de ax^2 devient le point de coordonnées $(x_S;0)$, sommet de $a(x - x_S)^2$.
0 reste le minimum de la fonction si $a > 0$.
0 reste le maximum de la fonction si $a < 0$.

Cet extremum est obtenu quand la variable est égale à l'abscisse x_S.
L'abscisse x_S du sommet reste l'unique zéro de la fonction.

3.4 Graphes des fonctions du second degré de la forme $a(x)^2 + y_S$ avec $y_S \neq 0$

Ils s'obtiennent à partir de ceux de ax^2 par une translation verticale de y_S.
y_S est le minimum de la fonction si $a > 0$. (donc $y_S > 0$, il n'y a pas de zéros).
y_S est le maximum de la fonction si $a < 0$. (donc $y_S < 0$, il n'y a pas de zéros).
L'extremum y_S est obtenu quand la variable est égale à x_S.

3.5 Synthèse

Les paramètres x_S et y_S dans l'expression canonique correspondent aux coordonnées du sommet S.

Si $a > 0$, la parabole ressemble à 

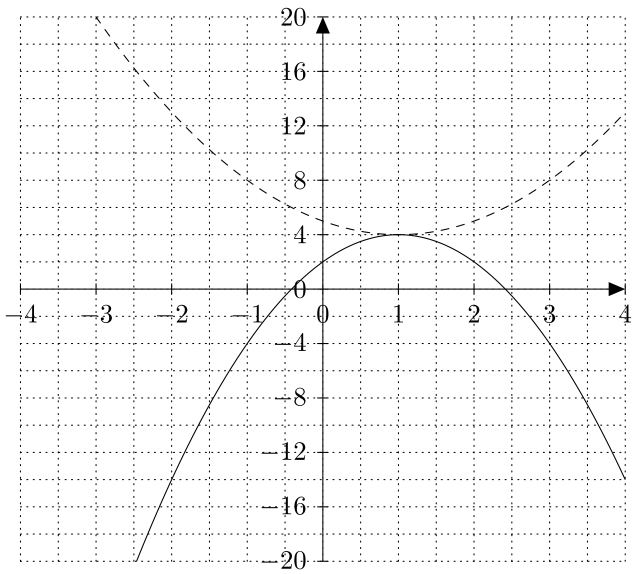
Si $a < 0$, elle ressemble à 

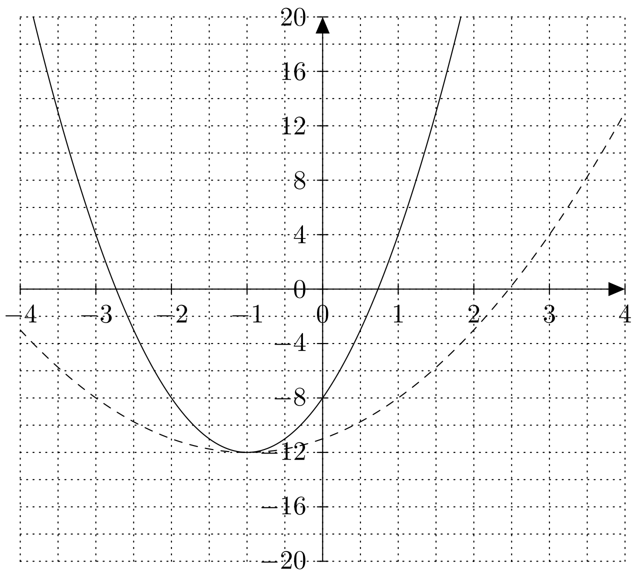
La justification que y_S est un extremum d'une fonction du second degré g peut se faire en utilisant sa forme canonique $g(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$.

y_S est **le minimum de** g si $a > 0$, car alors $g(x) - y_S = a(x - x_S)^2 \geq 0$, et donc $g(x) \geq y_S$.
y_S est **le maximum de** g si $a < 0$, car alors $g(x) - y_S = a(x - x_S)^2 \leq 0$, et donc $g(x) \leq y_S$.
On a $g(x) = y_S$ uniquement lorsque $x = x_S$.

3.6 Exemples

Trouve l'expression canonique des fonctions correspondant aux paraboles ci-dessous en précisant les transformations élémentaires effectuées pour les obtenir à partir de la fonction de référence x^2.





$\boxed{4}$ Résolution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

$\boxed{4.1}$ Principe

On se ramène à la forme canonique en posant $x_S = -\dfrac{b}{2a}$ et $y_S = -\dfrac{\Delta}{4a}$

$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a(x - x_S)^2 + y_S = 0 \Leftrightarrow a(x + \dfrac{b}{2a})^2 - \dfrac{\Delta}{4a} = 0 \Leftrightarrow (x + \dfrac{b}{2a})^2 = \dfrac{\Delta}{4a^2}$

On remarque que $\dfrac{\Delta}{4a^2} = -\dfrac{y_S}{a}$ a le même signe Δ car $4a^2 > 0$.

$\boxed{4.2}$ Méthode

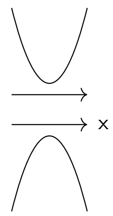
On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$

Discussion :

—Si $\Delta < 0$, **l'équation n'a pas de solution** (y_S a le même signe que a).

Si $a > 0$ (concavité vers le haut), cela correspond à $y_S > 0$, et donc le sommet au dessus de l'axe des x.

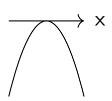
Si $a < 0$ (concavité vers le bas), cela correspond à $y_S < 0$, et donc le sommet au dessous de l'axe des x.

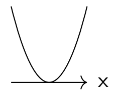


—Si $\Delta = 0$, **l'équation a une solution** ($y_S = 0$)

$\boxed{x = x_S = -\dfrac{b}{2a}}$.

Le zéro est l'abscisse du sommet.

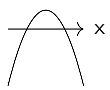


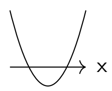


—Si $\Delta > 0$, **l'équation a deux solutions** (y_S a le signe opposé de celui de a)

$x_1 = \boxed{-\dfrac{b}{2a} + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}}$ ou $x_2 = \boxed{-\dfrac{b}{2a} - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}}$.

Les deux solutions sont de part et d'autre et à équidistance $\left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right|$ de l'abscisse du sommet.





$a < 0 \qquad x_1 < x_2 \qquad\qquad a > 0 \qquad x_2 < x_1$

$\boxed{5}$ Somme et produit des racines quand $\Delta > 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad\qquad x_1 \bullet x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 + x_2 = \left[-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] + \left[-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = -2\frac{b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Pour le produit, on utilise l'identité remarquable de la différence de deux carrés : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$x_1x_2 = \left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \dfrac{b^2-\Delta}{4a^2} = \dfrac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$

6 Expression factorisée $g(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a \neq 0$ quand $\Delta > 0$

L'expression canonique $a(x-x_S)^2 + y_S$ a trois paramètres : a, x_S et y_S.
L'expression développée ax^2+bx+c a trois paramètres : a, b et c.
Considérons l'expression $a(x-x_1)(x-x_2)$ qui a pour paramètres a, x_1 et x_2.
Elle est égale à 0 si et seulement si $x = x_1$ ou $x = x_2$ (règle du produit nul).

x_1 et x_2 sont donc les zéros de la fonction g définie par $g(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$

Il s'agit d'une équation du second degré. En effet, en développant :
$a(x-x_1)(x-x_2) = a(x^2-xx_2-x_1x+x_1x_2) = a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2) = ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$

Par identification, on retrouve que $\boxed{b = -a(x_1+x_2)}$ et $\boxed{c = ax_1x_2}$.
Pour trouver deux nombres x_1 et x_2 dont on connaît la somme x_1+x_2 et le produit x_1x_2, il suffit de résoudre l'équation $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2 = 0$

Pour factoriser $g(x) = ax^2+bx+c$, on calcule $\Delta = b^2-4ac$.
Si $\Delta > 0$, g a deux zéros x_1 et x_2 et on peut écrire $g(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.
Si $\Delta = 0$, l'expression factorisée de ax^2+bx+c est la forme canonique $a(x-x_S)^2$ (car $y_S = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{0}{4a} = 0$). $g(x) = a(x+\dfrac{b}{2a})^2$ et $x_S = -\dfrac{b}{2a}$ est alors appelé « zéro double ».
Si $\Delta < 0$, la fonction du second degré n'a pas de forme factorisée.

7 Comment trouver le maximum ou le minimum d'une fonction du second degré ?

Considérons une fonction du second degré. Elle admet un extremum en $x = x_S$.
y_S est un minimum si $a > 0$, ou un maximum si $a < 0$.
Si on connaît la forme canonique, on a directement x_S et y_S.
Si on connaît la forme développée, on a $x_S = -\dfrac{b}{2a}$ et y_S est l'image de x_S.
Si on connaît la forme factorisée, on a $x_S = \dfrac{x_1+x_2}{2}$. L'abscisse du sommet est au milieu des zéros.