Secondaire-Fonctions
Ophysis.net
Caractéristiques des fonctions

1 Définition et exemples de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

1.1 Relation, variable et image

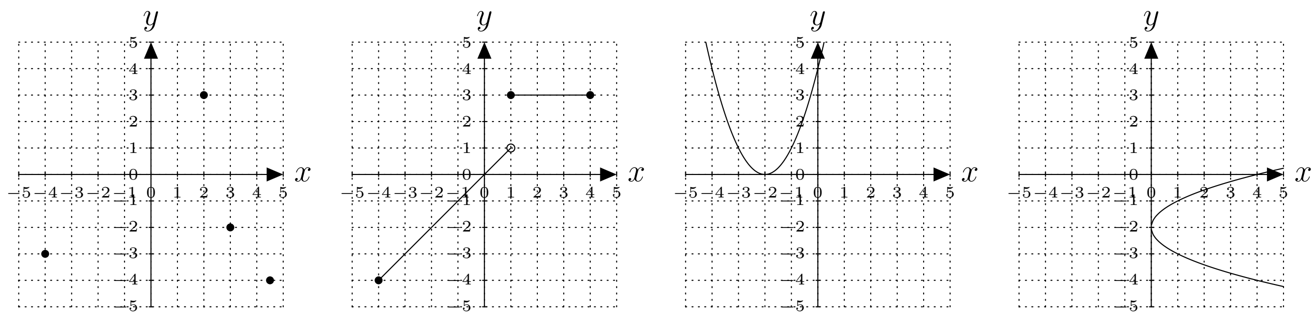
Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ permet de décrire une **relation** entre deux grandeurs (quantités déterminées par un nombre réel et une unité), l'une de ces grandeurs (appelée **image**) étant entièrement déterminée dès que l'on connait l'autre (appelée **variable**).

1.2 Exemples

1. La formule $\boxed{p = 2\pi r}$ donne le périmètre p d'un cercle **en fonction de** son rayon r. $\pi \approx 3{,}14159$. La variable est r et l'image est p.
2. La distance d parcourue par une voiture roulant à vitesse constante (par exemple 15m/s) **est fonction de** la durée t de son déplacement. Plus précisément, $\boxed{d = 15.t}$ avec d en mètres et t en secondes. La variable est t et l'image est d.
3. La distance d parcourue par un objet lâché sans vitesse initiale et soumis uniquement à l'attraction terrestre **est fonction de** la durée t de la chute. Plus précisément, $\boxed{d = \frac{1}{2}at^2}$ avec $a \approx 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$. La variable est t et l'image est d.
4. On mesure à 15h00 la température pendant 4 jours. La température est fonction du jour considéré.

numéro du jour	1	2	3	4
température en degrés Celsius	23	20	17	21

5. On peut aussi définir une fonction par un graphique. L'axe horizontal des abscisses permet de représenter les valeurs de la variable (souvent notée x). L'axe vertical des ordonnées permet de représenter les valeurs de l'image (souvent appelée y). Ci-dessous, les représentations graphiques de quatre **relations**. La dernière relation représentée n'est pas une fonction.



2 Graphe d'une fonction

On appellera, dans la suite de ce cours, x la variable et y l'image d'une fonction nommée f.

Le graphe de f, noté G_f est l'ensemble des couples $(x; y)$. Il est convenu que $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
$\boxed{\in}$ est un symbole mathématique qui signifie « appartient ».

Dans les graphiques ci-dessus :

le premier graphe contient un nombre fini de points. $G_f = \left\{(-4; -3); (2; 3); (3; -2); (\frac{9}{2}; -4)\right\}$.

Le dernier graphe **ne correspond pas à une fonction** car pour un même x, on peut avoir plusieurs y.

3 L'image de la variable x par la fonction f : $f(x)$

Considérons, par exemple, la deuxième représentation graphique et choisissons $x = 2$.
Cherchons les points d'abscisse $x = 2$ qui sont sur le graphe de f. On trouve $(2; 3) \in G_f$ et c'est le seul. On ne peut pas trouver un autre point sur le graphe de f ayant pour abscisse 2 car sinon f ne serait pas une fonction ! On note $f(2)$ **l'unique** y tel que $(2; y) \in G_f$. On a donc $f(2) = 3$

$f(2)$ est **l'image** de 2 par la fonction f. $\boxed{(x; y) \in G_f \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x)}$

$\boxed{\Leftrightarrow}$ est un symbole mathématique qui signifie « est équivalent à ».

4 Domaine de définition de f : dom f

Le domaine de définition de f est l'ensemble des x pour lesquels il existe y tel que $(x; y) \in G_f$.
Formellement, cela s'écrit : $\boxed{\text{dom } f = \{x : \exists y, (x; y) \in G_f\}}$

$\boxed{\exists}$ est un symbole mathématique qui signifie « il existe ».
L'écriture $f(x)$ n'a de sens que si $x \in$ dom f. Rappelons nous aussi que si y existe, il est forcément unique. y est l'image de x par f : on a $y = f(x)$.

Concrètement, pour trouver le domaine de définition de f à partir de sa représentation graphique, on considère une **droite verticale** que l'on déplace **de gauche à droite**. Quand cette droite verticale coupe le graphe de f, on en déduit que la valeur de x correspondante appartient au domaine de f.

On remarque que : $\boxed{G_f = \{(x; f(x)) : x \in \text{dom } f\}}$. En effet, le graphe de la fonction f est l'ensemble des couples du type $(x; f(x))$ tels que x appartient au domaine de f.

5 Ensemble image de f : im f

L'ensemble image de f est l'ensemble des y pour lesquels il existe x tel que $(x; y) \in G_f$.
Formellement, cela s'écrit : $\boxed{\text{im } f = \{y : \exists x, (x; y) \in G_f\}}$

On peut aussi accepter la définition suivante plus courte : $\boxed{\text{im } f = \{f(x) : x \in \text{dom } f\}}$

Concrètement, pour trouver l'ensemble image de f à partir de sa représentation graphique, on considère une **droite horizontale** que l'on déplace **de bas en haut**. Quand cette droite horizontale coupe le graphe de f, on en déduit que la valeur de y correspondante appartient à l'ensemble image de f.

6 Ensemble des antécédents d'un nombre b par une fonction f

L'ensemble des antécédents du nombre b par la fonction f est : $\boxed{\{x \in \text{dom } f : f(x) = b\}}$

C'est l'ensemble des nombres x appartenant au domaine de f tels que $f(x) = b$, c'est à dire tels que l'image de x par f est égale à b.

Considérons, par exemple, la fonction associée à la deuxième représentation graphique ci-dessus. L'ensemble des antécédents de 3 par cette fonction est l'intervalle $[1; 4]$.

Concrètement, pour trouver les éventuels antécédents de b par f à partir de la représentation graphique de f, on considère la droite horizontale d'équation $y = b$. On regarde si cette droite horizontale coupe le graphe de f. Si oui, b appartient à l'ensemble image de f. Il a donc au moins un antécédent. **Il peut en avoir plusieurs, même une infinité comme dans l'exemple précédent !**

Si on connaît l'expression algébrique de f (par exemple $f(x) = (x+2)^2$), **l'ensemble des antécédents de b est l'ensemble des solutions de l'équation** $f(x) = b$.

7 Ensemble des zéros (ou racines) de f

L'ensemble des zéros de f est tout simplement l'ensemble des antécédents de 0.
Pour le déterminer graphiquement, on observe l'intersection du graphe de f avec la droite horizontale d'équation $y = 0$ (**l'axe des abscisses**).
Algébriquement, il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$.
Formellement, l'ensemble des zéros de f est : $\boxed{\{x \in \text{dom } f : f(x) = 0\}}$
L'ensemble $\mathcal{S}$ des solution de l'équation $f(x) = 0$ pour chacune des trois fonctions ci-dessus est respectivement : $\mathcal{S} = \emptyset$; $\mathcal{S} = \{0\}$; $\mathcal{S} = \{-2\}$

8 Ordonnée à l'origine d'une fonction f

L'ordonnée à l'origine d'une fonction f n'existe que si le nombre 0 appartient au domaine de définition de f ($0 \in \text{dom } f$). C'est alors l'image du nombre 0 par f : $f(0)$.
La première fonction ci-dessus n'a pas d'ordonnée à l'origine car 0 n'est pas dans le domaine de définition.
L'ordonnée à l'origine de la deuxième fonction est 0 car $f(0) = 0$.
L'ordonnée à l'origine de la troisième fonction est 4 car $f(0) = 4$.

9 Tableau de signes d'une fonction f

Le tableau de signes d'une fonction f comporte deux lignes.

La première ligne indique les valeurs de la variable x qui appartiennent au domaine de définition. Les bornes du domaine de définition doivent être indiquées.
Les zéros de f doivent aussi être précisés car souvent la fonction change de signe quand elle passe par 0.

La deuxième ligne indique le signe de l'image ou sa valeur.

Par exemple, voici le tableau de signes de la deuxième fonction ci-dessus :

x	-4		0		4
$f(x)$	-4	$-$	0	$+$	3

x	-4		0		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Il n'est pas nécessaire de préciser la valeur de l'image quand il n'y a aucune ambiguïté sur son signe. Le deuxième tableau de signes est aussi accepté. Par contre, il faut mettre une double barre si l'image n'existe pas. Par exemple, si 4 n'appartenait pas au domaine de f, cela donnerait :

x	-4		0		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$

Voici le tableau de signes de la troisième fonction ci-dessus.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

Il est **obligatoire** d'indiquer dans la première ligne du tableau de signes toutes les bornes du domaine de définition de f.

10 Variations de f sur un intervalle I inclus dans le domaine de f

On considère une fonction f et un intervalle I tel que I **est inclus** dans le domaine de définition ($I \subset$ dom f).

$\boxed{\subset}$ est un symbole mathématique qui signifie « est inclus ».

$\boxed{\forall}$ est un symbole mathématique qui signifie « Pour tout ».

$\boxed{\Rightarrow}$ est un symbole mathématique qui signifie « implique que ».

f est **strictement croissante sur** $I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

f est **strictement décroissante sur** $I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

f est **croissante sur** $I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

f est **décroissante sur** $I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

f est **constante sur** $I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in I,\ f(x_1) = f(x_2)$.

On a mis le mot « **sur** » aussi en caractère gras car il est important de **toujours** préciser l'intervalle sur lequel on décrit la variation de f. Cet intervalle est forcément inclus dans le domaine de f.

11 Maximum, minimum et extremum d'une fonction

Soit f une fonction et $a \in$ dom f.

$f(a)$ est **le** maximum (global) de $f \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in$ dom $f,\ f(x) \leq f(a)$

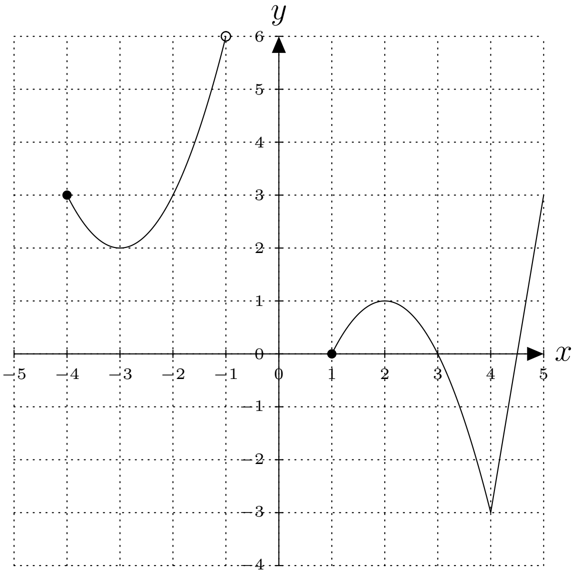
$f(a)$ est **le** minimum (global) de $f \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in$ dom $f,\ f(x) \geq f(a)$

$f(a)$ est **un** maximum de $f \quad \Leftrightarrow \quad \exists a_1, a_2$tels que $a_1 < a < a_2, \forall x \in$ dom $f, x \in \,]a_1; a_2[\, \Rightarrow f(x) \leq f(a)$

$f(a)$ est **un** minimum de $f \quad \Leftrightarrow \quad \exists a_1, a_2$tels que $a_1 < a < a_2, \forall x \in$ dom $f, x \in \,]a_1; a_2[\, \Rightarrow f(x) \geq f(a)$

Pour déterminer si $f(a)$ est un maximum (sous-entendu local) ou un minimum (sous-entendu local) de f, il suffit donc d'observer le graphe de f **autour (au voisinage) du point d'abscisse** a.

12 Tableau de variations d'une fonction



La première ligne du tableau de variations **doit** indiquer toutes les bornes du domaine de définition. Elle **doit** aussi contenir les valeurs de la variable associées à des extrema (les minima et les maxima).

La deuxième ligne du tableau indique les variations de la fonction. Elle **doit** indiquer les valeurs des images des variables de la première ligne.

Une double barre verticale indique que la fonction n'est pas définie pour la valeur de la variable correspondante.

Une zone hachurée indique que la fonction n'est pas définie entre les valeurs de la variable.

x	-4		-3		-1		1		2		4		$+\infty$
$f(x)$	3	↘	2	↗	6 ‖		0	↗	1	↘	-3	↗	$+\infty$

13 Symétrie du graphe de f

f est **paire** si et seulement si : $\boxed{(x;y) \in G_f \quad \Leftrightarrow \quad (-x;y) \in G_f}$

Ainsi, si $x \in$ dom f, alors $-x \in$ dom f et $f(-x) = f(x)$

« Deux points d'abscisses opposées ont le même y ».

Le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (d'équation $x = 0$).

f est **impaire** si et seulement si : $\boxed{(x;y) \in G_f \quad \Leftrightarrow \quad (-x;-y) \in G_f}$

Ainsi, si $x \in$ dom f, alors $-x \in$ dom f et $f(-x) = -f(x)$

« Deux points d'abscisses opposées ont des y opposés ».

Le graphe de f est symétrique par rapport au centre du repère.

Si f est impaire et si $0 \in$ dom f, il faut $f(-0) = -f(0)$. Or $f(-0) = f(0)$, donc il faut $f(0) = -f(0)$ et donc nécessairement $\boxed{f(0) = 0}$ car 0 est le seul nombre égal à son opposé.

Une fonction qui est paire et impaire a toutes ses images égales à 0. Son domaine de définition doit être tel que si $x \in$ dom f alors $-x \in$ dom f.

Il est faux de dire que seule la fonction nulle (de domaine égal à $\mathbb{R}$) est à la fois paire et impaire.

La fonction de graphe $G_h = \{(-2{,}0), (2{,}0)\}$ est aussi à la fois paire et impaire.

Son domaine est : dom $h = \{-2; 2\}$.