A Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

A.1 Grandeur à valeur dans $\mathbb{R}$

On appelle **grandeur à valeur dans** $\mathbb{R}$ toute propriété d'un phénomène ou objet, qui peut être distinguée qualitativement et déterminée quantitativement à l'aide d'une mesure ou d'un calcul.

Ses valeurs possibles s'expriment à l'aide de nombres réels et d'une unité de mesure et ne sont souvent connues que de façon approximative.

A.2 Utilité de la notion de fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ permet de décrire une **relation** entre deux grandeurs à valeurs dans $\mathbb{R}$, l'une étant appelée **la variable** et l'autre **l'image** avec la propriété suivante :

La valeur de l'image est déterminée de façon unique par la valeur de la variable.

A.3 Définition d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Une fonction, appelée par exemple f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un procédé qui permet d'associer à tout nombre réel x appartenant à son **domaine de définition** noté $\boxed{\text{dom}f}$, un **unique** nombre réel noté $\boxed{f(x)}$ qui est appelé **l'image de x par la fonction f**.

$f(x)$ se lit « f de x » et représente « l'image de x par la fonction f ».

L'écriture $f(x)$ n'est possible que si x appartient au domaine de définition de f : $\boxed{x \in \text{dom}f}$.

On écrit souvent : $\boxed{y = f(x)}$. x est **la variable de la fonction**.

On dit aussi souvent que x est la **variable libre** de la fonction f tandis que y est la **variable liée** à x par la fonction f.

A.4 Exemples

1. Le périmètre p d'un cercle **est fonction de** son rayon r : $\boxed{p = 2 \cdot \pi \cdot r}$ avec $\pi \approx 3{,}14159$. La variable est r et l'image est p. Le contexte nous impose la **condition d'existence** $\boxed{r \geq 0}$.

   Si on appelle f_1 la fonction ainsi définie, on a $\boxed{\text{dom}f_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}}$ et $\boxed{f_1(r) = 2 \cdot \pi \cdot r}$.

   Le périmètre $\boxed{p = f_1(r)}$.
2. La distance d parcourue par une voiture roulant à vitesse constante (par exemple 15m/s) **est fonction de** la durée t de son déplacement. Plus précisément, $\boxed{d = 15 \cdot t}$ avec d en mètres et t en secondes. La variable est la durée t et l'image est la distance d. Le contexte nous impose $t \geq 0$ et par ailleurs cette relation n'est plus vraie quand la vitesse de la voiture est modifiée, donc t a aussi une valeur maximale t_{max}. Finalement, on a la **condition d'existence** $\boxed{0 \leq t \leq t_{\text{max}}}$.

   Si on appelle f_2 la fonction ainsi définie, on a $\boxed{\text{dom}f_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq t_{\text{max}}\}}$ et $\boxed{f_2(t) = 15 \cdot t}$.

   La distance $\boxed{d = f_2(t)}$.
3. La distance d parcourue par un objet lâché sans vitesse initiale et soumis uniquement à l'attraction terrestre **est fonction de** la durée t de la chute.

Plus précisément, $\boxed{d = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$ avec $a \approx 9{,}81\,\text{m/s}^2$. La variable est t et l'image est d. Là encore on a une **condition d'existence** du type $\boxed{0 \leq t \leq t_{\text{max}}}$ car la chute ne dure pas indéfiniment.

Si on appelle f_3 la fonction ainsi définie, on a $\boxed{\text{dom} f_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq t_{\text{max}}\}}$ et $\boxed{f_3(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$.

La distance $\boxed{d = f_3(t)}$.

4. On mesure à 15h00 la température pendant 4 jours. La température T est fonction du jour j considéré.

numéro du jour	1	2	3	4
température en degrés Celsius à 15h00	23	20	17	21

Condition d'existence : la variable doit appartenir à l'ensemble $\{1; 2; 3; 4\}$. Autrement dit, la fonction n'est pas définie pour des valeurs autres que 1, 2, 3 ou 4.

Si on appelle f_4 la fonction ainsi définie, on a $\boxed{\text{dom} f_4 = \{1; 2; 3; 4\}}$.

De plus, $\boxed{f_4(1) = 23, f_4(2) = 20, f_4(3) = 17, f_4(4) = 21}$. La température $\boxed{T = f_4(j)}$.

B Graphe G_f et représentation graphique d'une fonction f

B.1 Définition du graphe G_f d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Le graphe G_f d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des couples $(x; f(x))$ tels que x appartient au domaine de définition de f.

Formellement : $\boxed{G_f = \{(x; f(x)) \mid x \in \text{dom} f\}}$.

B.2 Exemple

Considérons la fonction f_4 précédente.

Son graphe G_{f_4} est l'ensemble des couples $(j; f_4(j))$ tels que $j \in \{1; 2; 3; 4\}$.

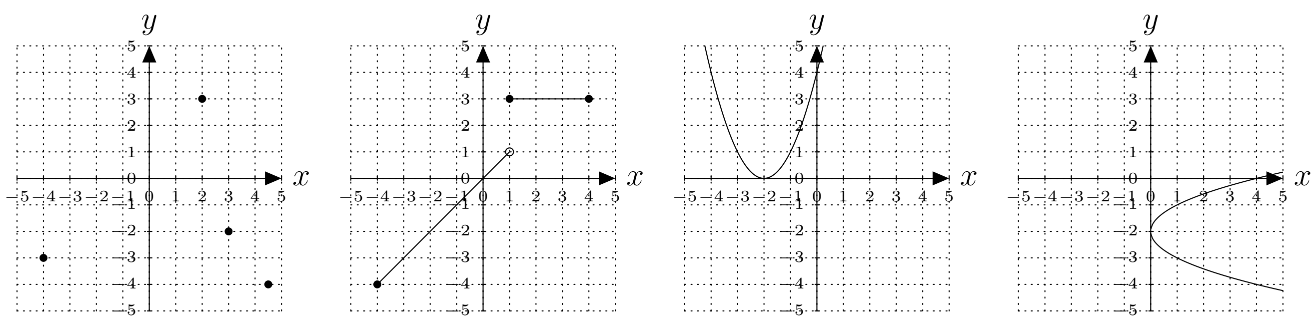
Autrement dit, $\boxed{G_{f_4} = \{(1; 23); (2; 20); (3; 17); (4; 21)\}}$.

Le graphe G_{f_4} de f_4 est un ensemble ne contenant que 4 éléments (4 points dans un repère du plan).

Mais très souvent, nous ne pourrons pas écrire explicitement le graphe d'une fonction comme précédemment, c'est à dire en énumérant ses éléments (qui sont des couples de nombres).

Une représentation graphique sera alors plus adaptée (et souvent plus éclairante sur les propriétés de la fonction étudiée).

B.3 Exemples de représentations graphiques (avec un intrus)



La première représentation graphique correspond au graphe $G_f = \left\{(-4;-3);(2;3);(3;-2);(\frac{9}{2};-4)\right\}$.

On peut donc écrire $\boxed{\text{dom} f = \{-4;2;3;\frac{9}{2}\}}$ et $\boxed{f(-4)=-3; f(2)=3; f(3)=-2; f(\frac{9}{2})=-4}$.

Le dernier graphe **ne définit pas une fonction** car pour un même x, il peut y avoir plusieurs y.

Exercice : Détermine l'ensemble de définition et l'expression algébrique de la fonction h correspondant à la deuxième représentation graphique (au deuxième graphe).

Remarque : Le troisième graphe correspond à une fonction du second degré. Tu seras capable de donner son expression algébrique dans quelques semaines.

B.4 Trouver le domaine de définition à partir d'une représentation graphique

Supposons le graphe G_f connu, le domaine de définition dom$f$ de f est l'ensemble des x pour lesquels il existe y tel que $(x;y) \in G_f$.

Formellement, cela s'écrit : $\boxed{\text{dom} f = \{x \mid \exists y, (x;y) \in G_f\}}$

$\boxed{\exists}$ est un symbole mathématique qui signifie « il existe ». (« E » à l'envers).

Concrètement, pour trouver le domaine de définition de f à partir de sa représentation graphique, on considère une **droite verticale** que l'on déplace **de gauche à droite**. Quand celle droite verticale coupe le graphe de f, on en déduit que la valeur de x correspondante appartient au domaine de f.

Exercice : Détermine le domaine de définition de chacune des trois fonctions définies à l'aide des représentations graphiques données ci-dessus.

Exercice : Explique pourquoi la quatrième représentation graphique ne définit pas une fonction.

B.5 Trouver l'ensemble image à partir d'une représentation graphique

Supposons le graphe G_f connu, l'ensemble image im$f$ de f est l'ensemble des y pour lesquels il existe x tel que $(x;y) \in G_f$.

Formellement, cela s'écrit : $\boxed{\text{im} f = \{y \mid \exists x, (x;y) \in G_f\}}$

On peut aussi accepter la définition suivante plus courte : $\boxed{\text{im} f = \{f(x) \mid x \in \text{dom} f\}}$

Concrètement, pour trouver l'ensemble image de f à partir de sa représentation graphique, on considère une **droite horizontale** que l'on déplace **de bas en haut**. Quand cette droite horizontale coupe le graphe de f, on en déduit que la valeur de y correspondante appartient à l'ensemble image de f.

Exercice : Détermine l'ensemble image de chacune des trois fonctions définies à l'aide des représentations graphiques données ci-dessus.

B.6 L'ensemble $\text{Ant}_b f$ des antécédents d'un nombre b par une fonction f

L'ensemble $\text{Ant}_b f$ des antécédents du nombre b par la fonction f est : $\boxed{\{x \in \text{dom} f \mid f(x) = b\}}$

Concrètement, pour trouver les éventuels antécédents de b par f à partir de la représentation graphique de f, on considère la droite horizontale d'équation $y = b$. On regarde si cette droite horizontale coupe

le graphe de f. Si oui, b appartient à l'ensemble image de f. Il a donc au moins un antécédent. **Il peut en avoir plusieurs, même une infinité comme dans l'exemple précédent !**
Exercice : Détermine l'ensemble $\mathrm{Ant}_4 f_3$ des antécédents de 4 par la fonction f_3 associée à la troisième représentation graphique ci-dessus.
Exercice : Même question que précédemment en remplaçant 4 par 1, puis par 0, puis par -2.

B.7 L'ensemble $\mathrm{Ant}_0 f$ des zéros (ou racines) de f

L'ensemble des zéros de f est l'ensembre des valeurs de la variables pour lesquelles l'image est égale à 0.
Ainsi, il s'agit tout simplement de l'ensemble $\mathrm{Ant}_0 f$ des antécédents de 0 par f.
Graphiquement, on détermine l'intersection du graphe de f avec la droite horizontale d'équation $y = 0$.
Sinon, si on connaît l'expression de f, on peut déterminer algébriquement (par calcul) $\mathrm{Ant}_0 f$ en cherchant l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Formellement : $\boxed{\mathrm{Ant}_0 f = \{x \in \mathsf{dom} f \mid f(x) = 0\}}$
Par exemple, le troisième graphe ci-dessus est celui de la fonction de référence définie par $f_3(x) = (x+2)^2$.
$f_3(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x+2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$ donc $\mathrm{Ant}_0 f_3 = \{-2\}$

Pour chacune des trois fonctions qu'on appelle maintenant f_1, f_2, et f_3 et qui correspondent respectivement aux trois premiers graphes précédents, on a :
$\mathrm{Ant}_0 f_1 = \emptyset \qquad \mathrm{Ant}_0 f_2 = \{0\} \qquad \mathrm{Ant}_0 f_3 = \{-2\}$

B.8 L'ordonnée à l'origine d'une fonction f

L'ordonnée à l'origine d'une fonction f n'existe que si 0 appartient au domaine de définition de f. C'est alors l'image du nombre 0 par f : $f(0)$.
La première fonction ci-dessus n'a pas d'ordonnée à l'origine car 0 n'est pas dans le domaine de définition.
L'ordonnée à l'origine de la deuxième fonction f_2 est 0 car $f_2(0) = 0$.
L'ordonnée à l'origine de la troisième fonction f_3 est 4 car $f_3(0) = 4$.

C Tableau de signes d'une fonction f

Le tableau de signes d'une fonction f comporte deux lignes.

La première ligne indique les valeurs de la variable qui appartiennent au domaine de définition de f ainsi que les bornes de celui-ci.
Les zéros de f doivent aussi être précisés car souvent la fonction change de signe quand elle passe par 0.

La deuxième ligne indique le signe de l'image ou sa valeur.

x	-4		0		4
$f(x)$	-4	$-$	0	$+$	3

Par exemple, voici le tableau de signes de la deuxième fonction ci-dessus.

Il n'est pas nécessaire de préciser la valeur de l'image quand il n'y a aucune ambiguïté sur son signe.

x	-4		0		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Par contre, il faut mettre une double barre si l'image n'existe pas. Par exemple, si 4 n'appartenait pas au domaine de f, cela donnerait :

x	-4		0		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$

Voici le tableau de signes de la troisième fonction ci-dessus. Les bornes ($-\infty$ et $+\infty$) **doivent** être précisées.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

D « appartient à », « est inclus dans », « implique que », « est équivalent à » « pour tout », « il existe »

$\boxed{\in}$ est un symbole mathématique qui signifie « **appartient à** ». Un élément appartient à un ensemble.

$\boxed{\subset}$ est un symbole mathématique qui signifie « **est inclus dans** »
Soit I un intervalle et f une fonction. L'écriture mathématique : $I \subset \text{dom}f$

- se lit « l'intervalle I est inclus dans le domaine de f »
- signifie que « **si** un nombre appartient à l'intervalle I **alors** il appartient aussi au domaine de f ».

Autrement dit, « $I \subset \text{dom}f$ » signifie que « **pour tout** nombre x, **si** $x \in I$ **alors** $f(x)$ existe ».

$\boxed{\Rightarrow}$ est un symbole mathématique qui signifie « **implique que** ».
« **si** $x \in I$ **alors** $x \in \text{dom}f$ » peut aussi s'écrire : « $x \in I \Rightarrow x \in \text{dom}f$ ».

$\boxed{\forall}$ est un symbole mathématique qui signifie « **pour tout** » ou encore « **quel que soit** ».

Au final, « $I \subset \text{dom}f$ » signifie que « $\forall x \in \mathbb{R}, x \in I \Rightarrow x \in \text{dom}f$ »
ou, plus court, « $I \subset \text{dom}f$ » signifie aussi que « $\forall x \in I, x \in \text{dom}f$ ».
En français, « pour tout » (« quel que soit » le) nombre x appartenant à (dans) l'intervalle I, $f(x)$ existe.

$\boxed{\Leftrightarrow}$ est un symbole mathématique qui signifie « **est équivalent à** » ou encore « **si et seulement si** ».

Par exemple, on peut écrire que : « $x \in \text{dom}f$ » $\Leftrightarrow$ « $f(x)$ existe ».
Ceci est une conséquence immédiate de la définition du domaine de f : $\text{dom}f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe}\}$

$\boxed{\exists}$ est un symbole mathématique qui signifie « Il existe ».
On pourrait donc aussi écrire : $\text{dom}f = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists f(x)\}$

E Variations de f sur un intervalle I inclus dans le domaine de f

On considère une fonction f et un intervalle I tel que $I \subset \text{dom}f$.

f est **strictement croissante sur** $I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

f est **strictement décroissante sur** $I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

f est **croissante sur** $I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

f est **décroissante sur** $I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

f est **constante sur** $I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in I,\ f(x_1) = f(x_2)$.

On a mis le mot « **sur** » aussi en caractère gras car il est important de **toujours** préciser l'intervalle sur lequel on décrit la variation de f. Cet intervalle est forcément inclus dans le domaine de f.

F Maximum, minimum et extremum d'une fonction

Soit f une fonction et $a \in \text{dom}f$.

$f(a)$ est **le** maximum (global) de $f \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \text{dom}f,\ f(x) \leq f(a)$

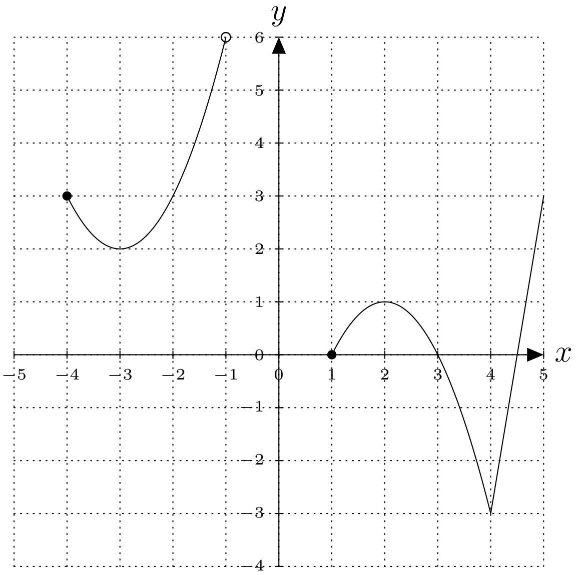
$f(a)$ est **le** minimum (global) de $f \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \text{dom}f,\ f(x) \geq f(a)$

$f(a)$ est **un** maximum de $f \quad \Leftrightarrow \quad \exists a_1, a_2, a \in]a_1; a_2[$ ET $\forall x \in \text{dom}f, x \in]a_1; a_2[\Rightarrow f(x) \leq f(a)$

$f(a)$ est **un** minimum de $f \quad \Leftrightarrow \quad \exists a_1, a_2, a \in]a_1; a_2[$ ET $\forall x \in \text{dom}f, x \in]a_1; a_2[\Rightarrow f(x) \geq f(a)$

Pour déterminer si $f(a)$ est un maximum (sous-entendu local) ou un minimum (sous-entendu local) de f, il suffit donc d'observer le graphe de f **autour (au voisinage) du point d'abscisse** $x = a$.
Si $a \in]a_1; a_2[$, **Alors** $]a_1; a_2[$ est un **voisinage** de a.

G Tableau de variations d'une fonction



La première ligne du tableau de variations **doit** indiquer toutes les bornes du domaine de définition. Elle **doit** aussi contenir les valeurs de la variable associées à des extrema (les minima et les maxima).

La deuxième ligne du tableau indique les variations de la fonction. Elle **doit** indiquer les valeurs des images des variables de la première ligne.

Une double barre verticale indique que la fonction n'est pas définie pour la valeur de la variable correspondante.

Une zone hachurée (ou coloriée) indique que la fonction n'est pas définie entre les valeurs de la variable.

x	-4	-3	-1	1	2	4	$+\infty$
$f(x)$	3	2	6 ‖	0	1	-3	$+\infty$

H Symétries du graphique d'une fonction

Le graphe peut admettre un axe ou un centre de symétrie.

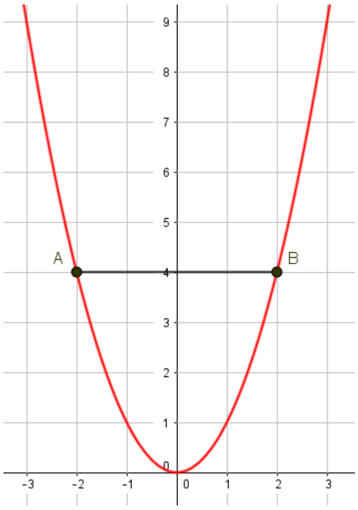
H.1 Fonction paire

Lorsque le graphe admet pour **axe de symétrie** l'axe des ordonnées, la fonction est paire.

f(-x)=f(x)

Exemple : $f(x) = x^2$ est une fonction paire.
En effet, on a alors : $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ (le signe - est au carré, il devient +).

A(-2 ;f(-2)) et B(2 ;f(2)) sont symétriques par rapport à l'axe vertical des ordonnées.
f(-2)=f(2)=4



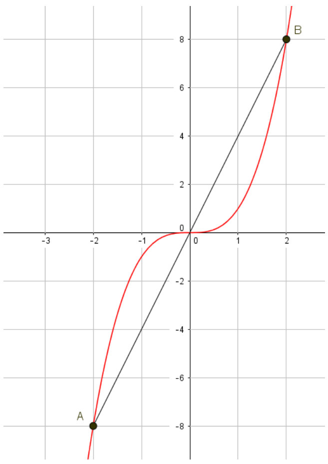
H.2 Fonction impaire

Lorsque le graphe admet pour **centre de symétrie** l'origine du repère, la fonction est impaire.

f(-x)=-f(x)

Exemple : $f(x) = x^3$ est une fonction impaire.
En effet, on a alors : $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ (le signe - est au cube, il reste -).

A(-2 ;f(-2)) et B(2 ;f(2)) sont symétriques par rapport à l'origine du repère.
f(-2)=-f(2)=-8



I Concavité

Le graphe de f a une **concavité vers le haut** (par exemple x^2) si y diminue de moins en moins **ou** augmente de plus en plus quand x augmente.

Le graphe de f a une **concavité vers le bas** (par exemple $-x^2$) si y augmente de moins en moins **ou** diminue de plus en plus quand x augmente.

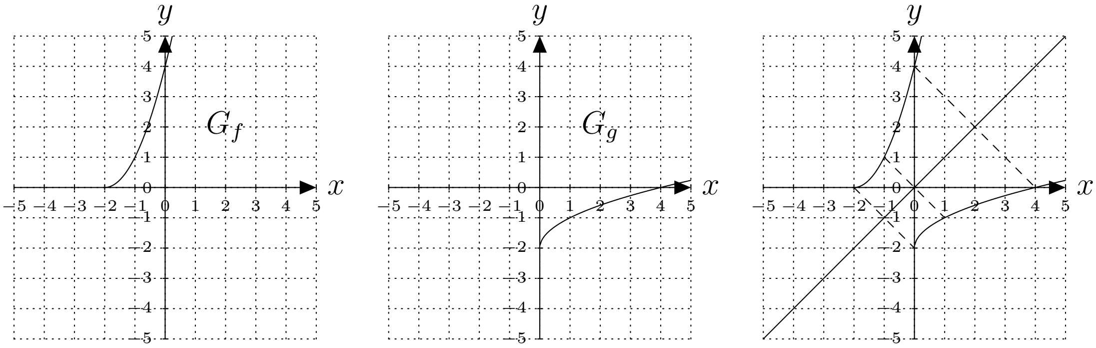
Un point sur le graphe qui se situe au niveau d'un changement de concavité s'appelle un **point d'inflexion**.

Par exemple, $(0{,}0)$ est un point d'inflexion pour la fonction x^3 et aussi pour la fonction $\sqrt[3]{x}$ (qui est d'ailleurs la fonction réciproque de x^3).

J Fonctions réciproques

J.1 Exemple

Considérons la fonction définie par $\boxed{f(x) = (x+2)^2}$ avec dom$f$ $= [-2; +\infty[$. On a donc supprimer les points d'abscisses strictement inférieures à -2.
On obtient le graphe G_g de la fonction g à partir de celui de la fonction f en permutant les coordonnées des points : $(x; y) \in G_f \quad \Leftrightarrow \quad (y; x) \in G_g$



Les deux fonctions sont donc réciproques l'une de l'autre.
On peut vérifier par exemple que $(-2; 0) \in G_f$ et que $(0; -2) \in G_g$.
De même pour $(-1; 1) \in G_f$ et $(1; -1) \in G_g$ ou encore $(0; 4) \in G_f$ et $(4; 0) \in G_g$.

J.2 Définition

Deux fonctions f et g sont réciproques si et seulement si $\boxed{(x; y) \in G_f \quad \Leftrightarrow \quad (y; x) \in G_g}$

Les graphes de deux fonctions réciproques sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$. Cette droite est aussi appelée la première bissectrice du repère.

Effectivement, le milieu des points $(a; b)$ et $(b; a)$ est $\left(\dfrac{a+b}{2}; \dfrac{a+b}{2}\right)$. Ce point est bien sur la droite d'équation $y = x$.

Par ailleurs, un vecteur directeur de la droite $y = x$ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un vecteur directeur de la droite passant par les points $(a; b)$ et $(b; a)$ est $\begin{pmatrix} b-a \\ a-b \end{pmatrix}$. On a bien $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} b-a \\ a-b \end{pmatrix}$ car $1 \cdot (b-a) + 1 \cdot (a-b) = 0$

J.3 Retour à l'exemple

$(x; y) \in G_f \quad \Leftrightarrow \quad y = (x+2)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 = \pm\sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad x + 2 = \sqrt{y} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{y} - 2 \quad \Leftrightarrow$
$(y; x) \in G_g \quad \Leftrightarrow \quad (y; \sqrt{y} - 2) \in G_g$
Soit encore, en revenant aux notations habituelles : $y = g(x) = \sqrt{x} - 2$
On trouve l'expression de g et cela correspond au graphe obtenu (translation verticale de -2 unités de la fonction racine carrée).

On a toujours dom$g$ = im$f$ et im$g$ = dom$f$. Ici, dom$g$ $= [0; +\infty[$ et im$g$ $= [-2; +\infty[$.