

Suites de nombres (termes)

1 C'est quoi une suite de nombres ?

1.1 Premiers exemples

10 ; 20 ; 30 ; 20 ; 13 est un exemple d'une **suite** (on pourrait aussi dire **liste**) de nombres (termes).

10 ; 13 ; 20 ; 20 ; 30 est un exemple d'une **autre suite**.

Pourtant, ces deux suites sont constituées des mêmes termes : 10 ; 13 ; 20 (deux fois) ; et 30 !

Dans une suite de nombres, l'ordre dans lequel ces nombres sont rangés est important.

Et un même nombre peut se répéter plusieurs fois.

Dans une suite (ou liste de nombres), il faut être capable de dire quel est le premier, le deuxième, le troisième, ..., le dernier (le $N^{\text{ème}}$ si il existe!).

1.2 Définition

Définition 1 : Suite ou liste de N termes (nombres)

Une suite de N termes est définie en indiquant comment associer à un **ensemble d'entiers consécutifs**, appelé ensemble des **indices**, (par exemple $\{1; 2; 3; \dots; N\}$) des nombres quelconques qui vont constituer les N **termes** de la suite.

Les **indices** permettent de **numéroter** les termes, donc de les **ordonner**.

1.3 Notations u_n (pour le terme d'indice n) et représentation graphique

Si on appelle u la suite 10 ; 20 ; 30 ; 20 ; 13 de 5 nombres rencontrée précédemment, on peut écrire que $u(1) = 10$; $u(2) = 20$; $u(3) = 30$; $u(4) = 20$; $u(5) = 13$.

Les indices utilisés pour préciser l'ordre dans lequel les nombres sont rangés sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 et 5.

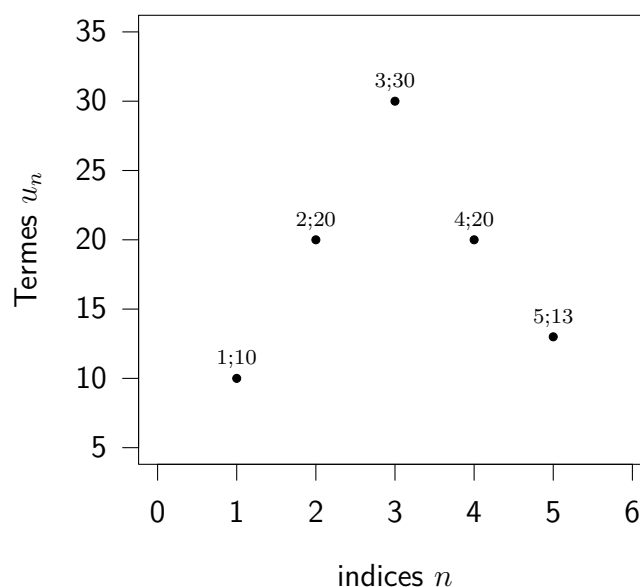
Les termes sont $u_1 = u(1) = 10$; $u_2 = u(2) = 20$; $u_3 = u(3) = 30$; $u_4 = u(4) = 20$; $u_5 = u(5) = 13$.

Ci-contre, nous avons représenté graphiquement cette suite de nombres.

Sur l'axe horizontal des abscisses, nous avons les indices n (les numéros d'ordre).

Sur l'axe vertical des ordonnées, nous avons les termes u_n .

Suite 10 ; 20 ; 30 ; 20 ; 13



La **représentation graphique** d'une suite permet de mieux voir **comment varient ses termes**.

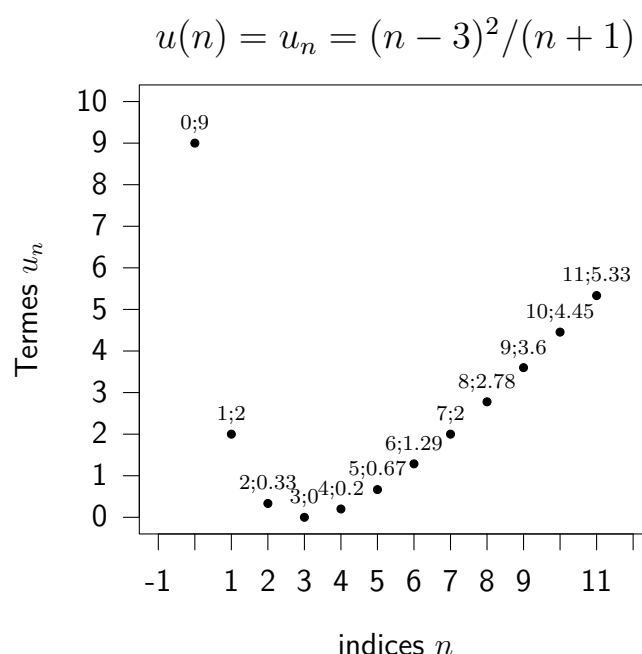
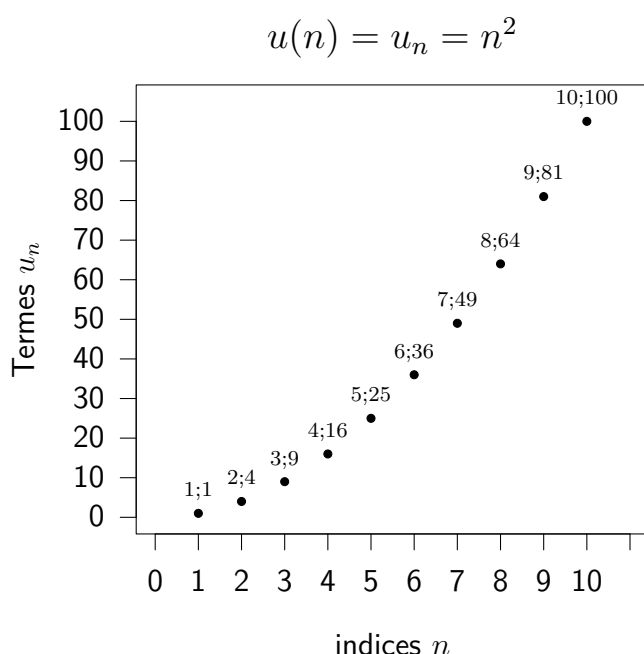
1.4 Comment définir une suite de nombres

On peut simplement énumérer, **dans l'ordre**, ses termes comme nous l'avons fait pour les deux premiers exemples.

Le plus pratique est toutefois de connaître **l'expression de son terme général** u_n .

Par exemple $u_n = n^2$ avec n variant de 1 à 10 ou $u_n = \frac{(n-3)^2}{n+1}$ avec n variant de 0 à 11.

Il est utile de **préciser l'ensemble des indices** n pour indiquer le nombre de termes consécutifs que l'on considère.



2 Suites arithmétiques

2.1 Propriété caractéristique

Définition 2 : Suite arithmétique et raison r

Une suite de nombres est arithmétique quand on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours un même nombre, souvent noté r , appelé **la raison** de la suite arithmétique.

La suite des entiers naturels : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; ... (premier terme 0 et raison 1)

La suite des entiers naturels impairs : 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; ... (premier terme 1 et raison 2)

La suite des multiples de 3 de premier terme 6 : 6 ; 9 ; 12 ; 15 ; 18 ; ... (premier terme 6 et raison 3)

Propriété 1 : Relation entre deux termes d'indices quelconques n et p

Soit u une suite arithmétique de raison r .

Si n et p sont deux indices **quelconques** appartenant à l'ensemble des indices de cette suite, on a

$$u_n = u_p + (n - p) \cdot r$$

On peut donc calculer u_n connaissant u_p , p et r .

2.2 Terme général u_n d'une suite arithmétique

On peut **déterminer l'expression du terme général** u_n d'une suite arithmétique u connaissant un de ses termes u_p (avec sa position p , c'est à dire son indice) et sa raison r .

Par exemple, supposons que $u_3 = 5$ et que $r = -7$, alors pour tout indice n de cette suite u :

$$u_n = u_3 + (n - 3) \cdot r, \text{ donc } u_n = 5 + (n - 3) \cdot (-7) = 5 - 7n + 21 = -7n + 26$$

Le terme général de la suite arithmétique u telle que $u_3 = 5$ et $r = -7$ est $u_n = -7n + 26$

Exercice : Trouver l'expression générale de la suite arithmétique z telle que $z_7 = -5$ et $r = 4$.

Réponse : $z_n = z_7 + (n - 7) \cdot r = -5 + (n - 7) \cdot 4 = -5 + 4n - 28 = 4n - 33$

On peut vérifier que $z_7 = 4 \cdot 7 - 33 = 28 - 33 = -5$

Propriété 2 : Terme général d'une suite arithmétique

Si u est une suite arithmétique de raison r , l'expression de son terme général est de la forme

$$u_n = r \cdot n + b.$$

2.3 Représentation graphique d'une suite arithmétique et taux d'accroissement

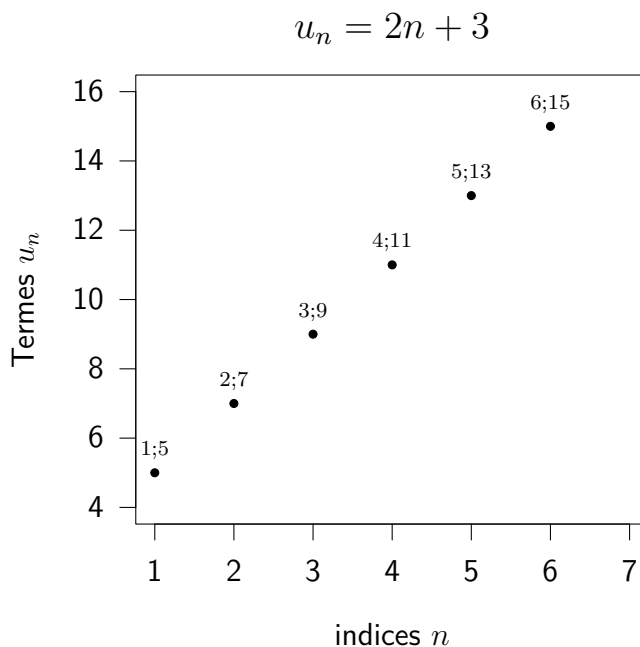
Voici ci-contre la représentation graphique de la suite arithmétique de terme général : $u_n = 2n + 3$. Sa raison est donc $r = 2$ et son premier terme $u_1 = 2 + 3 = 5$.

Tous les points de cette suite sont sur une droite de pente 2 (**égale à la raison**) et d'ordonnée à l'origine 3 (on pourrait dire que l'ordonnée à l'origine est u_0)

Puisque $u_n = u_p + (n - p) \cdot r$, on en déduit que : $r = \frac{u_n - u_p}{n - p}$

Ce rapport, qui est à la fois la raison de la suite et la pente de la droite qui contient ses points, est aussi son **taux d'accroissement**.

Son unité est celle des termes divisée par l'unité des indices.



Par exemple, si Paul fait 100 € d'économie chaque mois, le **taux d'accroissement de ses économies** est $r = 100$ € **par mois**.

S'il a $u_1 = 250$ € d'économies le premier mois, le $n^{\text{ème}}$ mois il aura :

$$u_n = u_1 + (n - 1) \cdot r = 250 + (n - 1) \cdot 100 = 100n + 150 \text{ € d'économie.}$$

3 Suites géométriques

3.1 Propriété caractéristique

Définition 3 : Suite géométrique et raison q

Une suite de nombres est géométrique quand on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par un même nombre, souvent noté q , appelé **la raison** de la suite géométrique.

La suite des puissances de 2 d'exposants positifs : $2^0 ; 2^1 ; 2^2 ; 2^3 ; 2^4 ; \dots$ soit : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; ... (Premier terme 1 et raison $q = 2$)

La suite des puissances de 2 de premier terme $\frac{1}{8}$: $2^{-3} ; 2^{-2} ; 2^{-1} ; 2^0 ; 2^1 ; 2^2 ; \dots$ (Premier terme $\frac{1}{8}$ et raison $q = 2$)

2 ; 6 ; 18 ; ... ; 13122 (premier terme 2 et raison $q = 3$. Le dernier terme 13122 est le 9^{ème} terme).

Propriété 3 : Relation entre deux termes d'indices quelconques n et p

Soit u une suite géométrique de raison q .

Si n et p sont deux indices **quelconques** appartenant à l'ensemble des indices de cette suite, on a

$$u_n = u_p \cdot q^{n-p}$$

On peut donc calculer u_n connaissant u_p , p et q .

3.2 Terme général u_n d'une suite géométrique

On peut **déterminer l'expression du terme général** u_n d'une suite géométrique u connaissant un de ses termes u_p (avec sa position p , c'est à dire son indice) et sa raison q .

Par exemple, supposons que $u_3 = 5$ et que $q = 2$, alors pour tout indice n de cette suite u :

$$u_n = u_3 \cdot q^{n-3}, \text{ donc } u_n = 5 \cdot 2^{n-3} = 5 \cdot 2^n \cdot 2^{-3} = 5 \cdot 2^n \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \cdot 2^n$$

Le terme général de la suite géométrique u telle que $u_3 = 5$ et $q = 2$ est $u_n = \frac{5}{8} \cdot 2^n$

Exercice : Trouver l'expression générale de la suite géométrique z telle que $z_9 = 13122$ et $q = 3$.

Réponse : $z_n = z_9 \cdot q^{n-9} = 13122 \cdot 3^{n-9} = 13122 \cdot 3^n \cdot 3^{-9} = \frac{13122}{3^9} \cdot 3^n = \frac{2}{3} \cdot 3^n$

On peut vérifier que $z_9 = \frac{2}{3} 3^9 = 2 \cdot 3^8 = 13122$

Son premier terme est $z_1 = \frac{2}{3} 3 = 2$.

Il s'agit du troisième exemple 2 ; 6 ; 18 ; ... ; 13122 donné précédemment.

Propriété 4 : Terme général d'une suite géométrique

Si u est une suite géométrique de raison q , l'expression de son terme général est de la forme

$$u_n = c \cdot q^n$$

3.3 Représentation graphique d'une suite géométrique

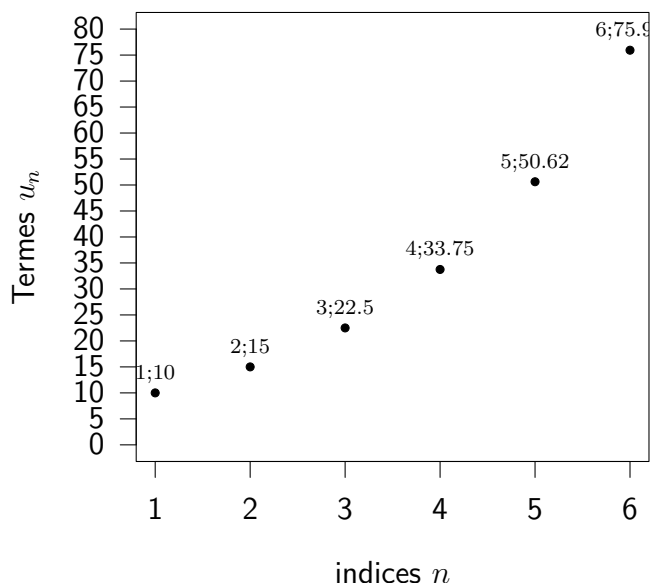
L'expression générale d'une suite géométrique est : $u_n = c \cdot q^n$.

En particulier, $u_{n+1} = c \cdot q^{n+1} = c \cdot q^n \cdot q = u_n \cdot q$. On passe d'un terme au suivant en multipliant par q .

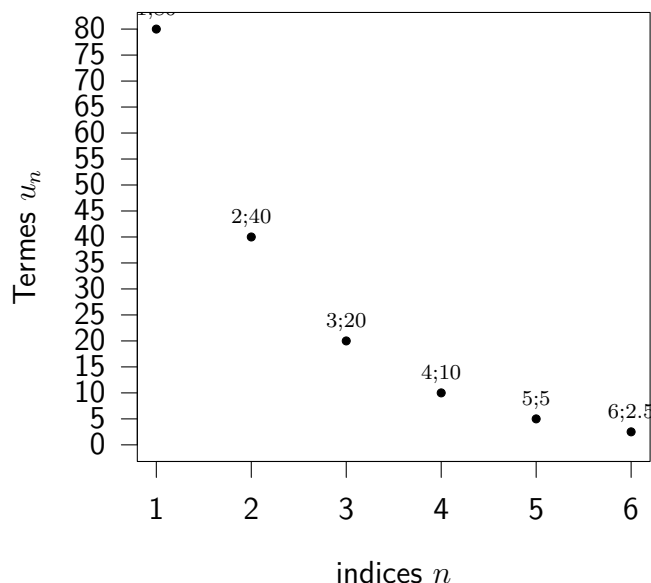
Supposons que la raison q (la base de la puissance q^n) est strictement positive : $q > 0$.

Termes tous positifs ($c > 0$)

$$u_n = 10/1,5 \cdot 1,5^n$$

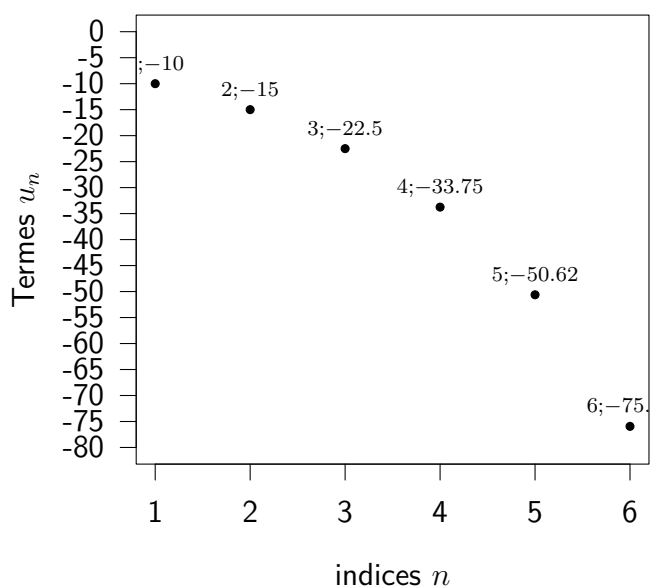


$$u_n = 80/0,5 \cdot 0,5^n$$

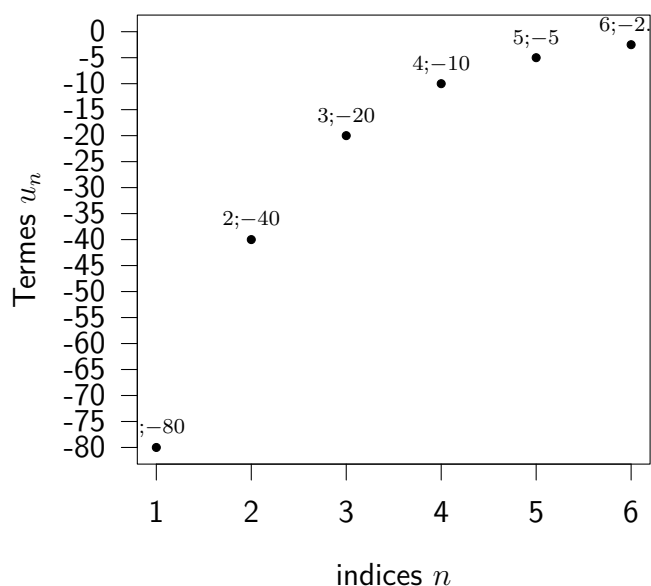


Termes tous négatifs ($c < 0$)

$$u_n = -10/1,5 \cdot 1,5^n$$



$$u_n = -80/0,5 \cdot 0,5^n$$



3.4 Taux de croissance d'une suite géométrique

Pour une **suite arithmétique**, la propriété fondamentale s'écrit aussi $u_n - u_p = (n - p) \cdot r$.

Les variations des termes (des images) sont proportionnelles aux variations des indices (des valeurs de la variable).

Autrement dit, r étant fixé, la variation $u_n - u_p$ des termes ne dépend que de la variation $n - p$ des indices.

La quantité $\frac{u_n - u_p}{n - p} = r$, est appelée **taux d'accroissement de la suite entre n et p** . Pour une suite arithmétique, le taux d'accroissement est constante, égale à la raison r .

Pour une **suite géométrique**, la propriété fondamentale $u_n = u_p \cdot q^{n-p}$ s'écrit aussi $\frac{u_n}{u_p} = q^{n-p}$.

Le rapport $\frac{u_n}{u_p}$ entre deux termes ne dépend que de la variation $n - p$ des indices.

Ainsi, pour une suite géométrique, la quantité $\left(\frac{u_n}{u_p}\right)^{\frac{1}{n-p}} = \sqrt[n-p]{\frac{u_n}{u_p}} = q$ est constante, égale à la raison q de la suite géométrique. Cependant, ce n'est pas cette quantité qui est appelée taux de croissance entre n et p .

Nous voulons une quantité dans laquelle la différence $u_n - u_p$ des termes intervient.

On va donc soustraire u_p à chaque membre de la propriété fondamentale $u_n = u_p \cdot q^{n-p}$.

Nous en déduisons $u_n - u_p = u_p \cdot (q^{n-p} - 1)$

Ainsi, c'est la quantité $\frac{u_n - u_p}{u_p} = (q^{n-p} - 1) = t$ qui est appelée **taux de croissance de la suite**

entre n et p . Pour une suite géométrique, cette quantité ne dépend que de la différence $n - p$ des indices. Par conséquent, t est constant si on impose une valeur à $n - p$ (en général on prend $n - p = 1$).

Par exemple, supposons qu'un nombre de bactéries est multiplié par 1,25 chaque jour. Soit $u_1 = 100$ la nombre de bactéries au début du premier jour.

Au début du deuxième jour, on aura $u_2 = 1,25 \cdot u_1 = 1,25 \cdot 100 = 125$ bactéries.

Au début du troisième jour, on aura $u_3 = 1,25 \cdot u_2 = 1,25^2 \cdot 100 \approx 156$ bactéries.

...

$$u_n = 1,25^{n-1} \cdot 100$$

...

u est une suite géométrique de premier terme $u_1 = 100$ bactéries et de raison $q = 1,25$

$$\frac{u_2 - u_1}{u_1} = \frac{125 - 100}{100} = \frac{25}{100} = 25\% = t \text{ est le taux de croissance par jour, c'est à dire quand } n - p = 1.$$

En effet, on aurait de même :

$$t = \frac{u_3 - u_2}{u_2} = \frac{u_3}{u_2} - \frac{u_2}{u_2} = q - 1 = 1,25 - 1 = 0,25 = 25\%$$

Ceci est cohérent avec la formule qui donne $t = q^{n-p} - 1 = q - 1$ car $n - p = 1$.

Le taux de croissance t **par jour** de u est $t = 1,25 - 1 = 0,25 = 25\%$ de bactéries en plus par jour.

Autre exemple, si $q = \frac{1}{2}$, alors $t = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} = -50\%$. Le taux de **décroissance** est de 50%.

4 Sommes des termes consécutifs d'une suite arithmétique ou géométrique

Somme des N premiers termes d'une **suite arithmétique** : $S_N = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N = \frac{N \cdot (u_1 + u_N)}{2}$

$$S = \text{Nombre de termes} \cdot \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Somme des N premiers termes d'une **suite géométrique** : $S_N = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_N = \frac{u_1 - u_{N+1}}{1 - q}$

$$S_N = \frac{\text{premier terme} - \text{terme suivant le dernier terme}}{1 - \text{la raison}}$$

Ou encore

$$S_N = \text{premier terme} \cdot \frac{1 - (\text{la raison})^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{la raison}}$$