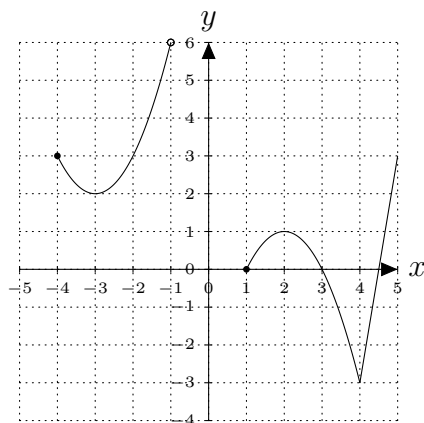


Signes, variations, extrema et symétries des fonctions

A Tableau de signes d'une fonction f



Le tableau de signes d'une fonction f comporte deux lignes.

La première ligne du tableau de signes **doit** indiquer toutes les bornes du domaine de définition. Elle **doit** aussi contenir les valeurs de la variable qui correspondent à un changement de signe.

Par exemple les zéros de f doivent être précisés car souvent la fonction change de signe quand elle passe par 0.

Les points de discontinuité peuvent aussi correspondre à des changements de signes.

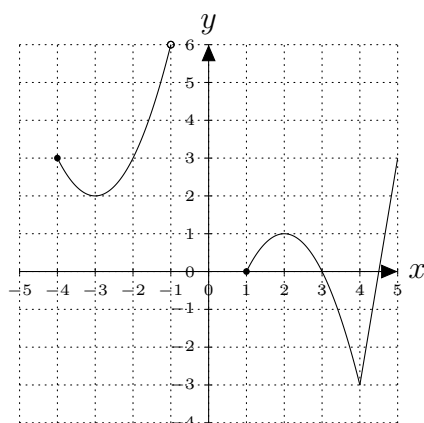
La deuxième ligne indique les signes des images ou leurs valeurs.

x	-4		-1		1		3		4,5		$+\infty$
$f(x)$	-4	+			0	+	0	-	0	+	$+\infty$

Une double barre verticale indique que la fonction n'est pas définie pour la valeur de la variable correspondante.

Une zone hachurée (ou coloriée) indique que la fonction n'est pas définie entre les valeurs de la variable.

B Tableau de variations d'une fonction



La première ligne du tableau de variations **doit** indiquer toutes les bornes du domaine de définition. Elle **doit** aussi contenir les valeurs de la variable associées à des extrema (les minima et les maxima).

La deuxième ligne du tableau indique les variations de la fonction. Elle **doit** indiquer les valeurs des images des variables de la première ligne.

x	-4		-3		-1		1		2		4		$+\infty$
$f(x)$	3		2		6		0		1		-3		$+\infty$

C « appartient à », « est inclus dans », « implique que », « est équivalent à » « pour tout », « il existe »

$\in$ est un symbole mathématique qui signifie « **appartient à** ». Un élément appartient à un ensemble.

$\subset$ est un symbole mathématique qui signifie « **est inclus dans** »

Soit I un intervalle et f une fonction. L'écriture mathématique : $I \subset \text{dom}f$

- se lit « l'intervalle I est inclus dans le domaine de f »
- signifie que « **si** un nombre appartient à l'intervalle I **alors** il appartient aussi au domaine de f ».

Autrement dit, « $I \subset \text{dom}f$ » signifie que « **pour tout** nombre x , **si** $x \in I$ **alors** $f(x)$ existe ».

$\Rightarrow$ est un symbole mathématique qui signifie « **implique que** ».

« **si** $x \in I$ **alors** $x \in \text{dom}f$ » peut aussi s'écrire : « $x \in I \Rightarrow x \in \text{dom}f$ ».

$\forall$ est un symbole mathématique qui signifie « **pour tout** » ou encore « **quel que soit** ».

Au final, « $I \subset \text{dom}f$ » signifie que « $\forall x \in \mathbb{R}, x \in I \Rightarrow x \in \text{dom}f$ »

ou, plus court, « $I \subset \text{dom}f$ » signifie aussi que « $\forall x \in I, x \in \text{dom}f$ ».

En français, « pour tout » (« quel que soit » le) nombre x appartenant à (dans) l'intervalle I , $f(x)$ existe.

$\Leftrightarrow$ est un symbole mathématique qui signifie « **est équivalent à** » ou encore « **si et seulement si** ».

Par exemple, on peut écrire que : « $x \in \text{dom}f$ » $\Leftrightarrow$ « $f(x)$ existe ».

Ceci est une conséquence immédiate de la définition du domaine de f : $\text{dom}f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ existe}\}$

$\exists$ est un symbole mathématique qui signifie « **il existe** ».

On pourrait donc aussi écrire : $\text{dom}f = \{x \in \mathbb{R} : \exists f(x)\}$

D Variations de f sur un intervalle I inclus dans le domaine de f

On considère une fonction f et un intervalle I tel que $I \subset \text{dom}f$.

f est **strictement croissante sur** $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

f est **strictement décroissante sur** $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

f est **croissante sur** $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

f est **décroissante sur** $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

f est **constante sur** $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, f(x_1) = f(x_2)$.

On a mis le mot « **sur** » aussi en caractère gras car il est important de **toujours** préciser l'intervalle sur lequel on décrit la variation de f . Cet intervalle est forcément inclus dans le domaine de f .

E Maximum, minimum et extremum d'une fonction

Soit f une fonction et $a \in \text{dom} f$.

$f(a)$ est **le** maximum (global) de $f \Leftrightarrow \forall x \in \text{dom} f, f(x) \leq f(a)$

$f(a)$ est **le** minimum (global) de $f \Leftrightarrow \forall x \in \text{dom} f, f(x) \geq f(a)$

$f(a)$ est **un** maximum de $f \Leftrightarrow \exists a_1, a_2, a \in]a_1; a_2[\text{ ET } \forall x \in \text{dom} f, x \in]a_1; a_2[\Rightarrow f(x) \leq f(a)$

$f(a)$ est **un** minimum de $f \Leftrightarrow \exists a_1, a_2, a \in]a_1; a_2[\text{ ET } \forall x \in \text{dom} f, x \in]a_1; a_2[\Rightarrow f(x) \geq f(a)$

Pour déterminer si $f(a)$ est un maximum (sous-entendu local) ou un minimum (sous-entendu local) de f , il suffit donc d'observer le graphe de f **autour (au voisinage) du point d'abscisse $x = a$.**

Si $a \in]a_1; a_2[$, Alors $]a_1; a_2[$ est un **voisinage de a .**

F Symétries du graphique d'une fonction

Le graphe peut admettre un axe ou un centre de symétrie.

F.1 Fonction paire

Lorsque le graphe admet pour **axe de symétrie** l'axe des ordonnées, la fonction est paire.

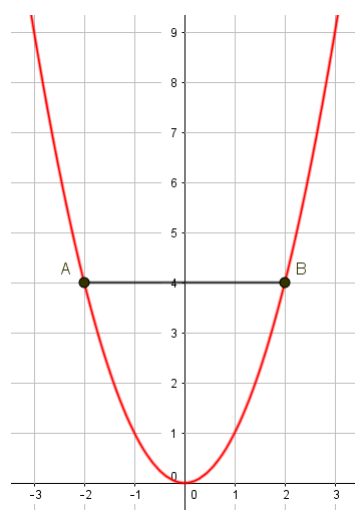
$$f(-x) = f(x)$$

Exemple : $f(x) = x^2$ est une fonction paire.

En effet, on a alors : $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ (le signe - est au carré, il devient +).

$A(-2; f(-2))$ et $B(2; f(2))$ sont symétriques par rapport à l'axe vertical des ordonnées.

$$f(-2) = f(2) = 4$$



F.2 Fonction impaire

Lorsque le graphe admet pour **centre de symétrie** l'origine du repère, la fonction est impaire.

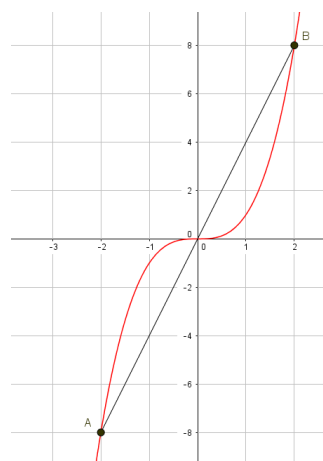
$$f(-x) = -f(x)$$

Exemple : $f(x) = x^3$ est une fonction impaire.

En effet, on a alors : $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ (le signe - est au cube, il reste -).

$A(-2; f(-2))$ et $B(2; f(2))$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

$$f(-2) = -f(2) = -8$$



G Concavité

Le graphe de f a une **concavité vers le haut** (par exemple x^2) si y diminue de moins en moins **ou** augmente de plus en plus quand x augmente.

Le graphe de f a une **concavité vers le bas** (par exemple $-x^2$) si y augmente de moins en moins **ou** diminue de plus en plus quand x augmente.

Un point sur le graphe qui se situe au niveau d'un changement de concavité s'appelle un **point d'inflexion**.

Par exemple, $(0,0)$ est un point d'inflexion pour la fonction x^3 et aussi pour la fonction $\sqrt[3]{x}$ (qui est d'ailleurs la fonction réciproque de x^3).