Droite - Distance - Vecteur

1 Introduction

1.1 Origine du mot Géométrie

Le mot géométrie est construit à partir de « géo » (qui correspond à la notion de « terrain ») et « métrie » (qui correspond à la notion de « mesure »).
À son début, la géométrie est « la science de la mesure du terrain ».

1.2 La géométrie vue par les mathématiciens

Les mathématiciens, s'inspirant de cette science expérimentale, ont développé une géométrie plus abstraite, plus idéale.
Pour les mathématiciens, tous les objets géométriques (segments de droite, droites, plans, cercles, triangles, ...) sont des ensembles de points.
Pour **nommer des points**, nous utiliserons des lettres majuscules : A, B, C, ...

2 La droite

2.1 Du fil tendu au segment de droite

Un **fil tendu** à ses deux extrémités permet d'imaginer ce que les mathématiciens appelle un **segment de droite**.
Pour cela, il faut que **l'épaisseur du fil soit négligeable par rapport à sa longueur**.
En effet, le mathématicien considère qu'**un segment de droite a seulement une longueur, pas du tout d'épaisseur**.

Nous noterons $[AB]$ le segment de droite ayant pour extrémités les points A et B.

2.2 Droite

Un segment de droite est un sous-ensemble (une partie) d'un ensemble de points plus grand appelé **droite**.

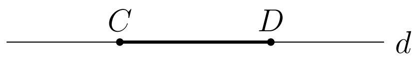
Propriété 1 : Droite

Par deux points distincts, il passe une droite et une seule.

Le contraire de **distincts** est **confondus**. Deux points confondus se situent à une même position.
Considérons deux points distincts C et D. Nous pouvons appeler CD l'unique droite qui passe pas C et D.
Quand on dit qu'une droite d passe par un point A, cela signifie que le point A appartient à la droite d. Cela se note $A \in d$.
$\boxed{\in}$ est le symbole d'appartenance.
$A \in d$ signifie que le point A appartient à un ensemble de points d, plus précisément la droite d.

Propriété 2 : Droite et segment de droite

Si une droite d passe par deux points C et D, alors d contient le segment de droite $[CD]$.
Mathématiquement : $C \in d$ ET $D \in d \Rightarrow [CD] \subset d$



$\boxed{\subset}$ est le symbole d'inclusion. $[CD] \subset d$ se lit « le segment $[CD]$ est inclus dans la droite d ». Cela signifie que **tout point** du segment $[CD]$ est aussi un point de la droite d : $M \in [CD] \Rightarrow M \in d$.
$[CD]$ est un sous-ensemble (une partie) de la droite d.

$\boxed{\Rightarrow}$ est le symbole d'implication. $M \in [CD] \Rightarrow M \in d$ se lit **SI** $M \in [CD]$ **ALORS** $M \in d$.
Remarquons que si C et D sont des points de d, alors $d = CD$ car il n'y a qu'une seule droite qui passe par C et D. Mathématiquement, cela s'écrit : $C \in d$ ET $D \in d \Rightarrow d = CD$.
Quand on écrit $\boxed{d = CD}$, cela signifie que $d \subset CD$ ET $CD \subset d$. Tout point de la droite d est un point de la droite CD ET tout point de la droite CD est un point de la droite d.

Le mathématicien considère qu'une droite n'a pas d'extrémités ou plus précisément, que ses deux extrémités se situent « à l'infini ».

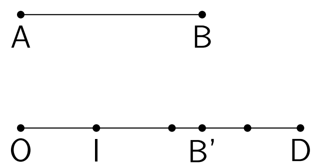
2.3 La règle comme outil pour tracer des droites

Pour tracer un segment de droite $[AB]$ entre deux points A et B sur notre feuille, le fil tendu n'est pas pratique.
Nous utiliserons une règle, **le fil tendu sert alors à vérifier la rectitude de la ligne tracée**.
En effet, le fil tendu doit pouvoir être superposé sur le segment $[AB]$ tracé sur la feuille.
Chaque point du segment $[AB]$ coïncide alors avec exactement un point du fil tendu.
Le fil tendu sert ainsi à vérifier que notre règle est bien construite.
Mais ce n'est pas tout ! Le fil tendu va nous permettre de reporter la longueur d'un segment sur une droite. **En plus d'être une règle de référence, le fil tendu est aussi un compas de référence.**
Il est en effet possible de faire deux marques sur le fil tendu pour repérer sur ce dernier les positions des extrémités A et B du segment $[AB]$.

3 Distance entre deux points

3.1 Le compas comme outil pour reporter des longueurs

Reprenons le fil sur lequel on a marqué la position coïncidant avec A et celle coïncidant avec B (voir paragraphe précédent).
Considérons deux autres points sur notre feuille que nous appellerons O et I. Traçons avec la règle un segment de droite $[OD]$ passant par I et plus long que $[AB]$.
En superposant le fil précédent sur le segment $[OD]$ **tracé sur la feuille**, nous pouvons trouver **l'unique point** B' **sur** $[OD]$ **tel que les segments** $[AB]$ **et** $[OB']$ **ont la même longueur**.



Notre fil a joué le rôle d'un compas. Il nous a permis de reporter la longueur de $[AB]$ sur $[OD]$ en partant de O (nous avons fait coïncider la marque du point A sur le fil avec le point O sur la feuille).

3.2 Mesurer une longueur de segment - Distance entre deux points

Nous appelerons très souvent $[OI]$ le segment ayant une longueur dont la mesure sera choisie arbitrairement égale à 1. $[OI]$ sera donc **le segment unité**.

Définition 1 : Distance entre deux points

La distance entre deux points A et B est la mesure de la longueur du segment $[AB]$ défini par ces deux points.
Cette mesure est un nombre qui indique combien de fois la longueur du segment unité $[OI]$ est contenue dans la longueur du segment $[AB]$.
On note $|AB|$ la distance entre les points A et B.

On a donc $|OI| = 1$ car la longueur du segment unité $[OI]$ est choisie égale à 1.
En utilisant un compas, nous pouvons reporter la longueur de $[OI]$ plusieurs fois sur le segment $[OD]$.

3.3 Exercice

a) Trouve sur le segment $[OD]$ tracé plus haut le point E tel que $|OE| = 2 \cdot |OI| = 2 \cdot 1 = 2$

b) Trouve sur le segment $[OD]$ tracé plus haut le point F tel que $|OF| = 3 \cdot |OI| = 3 \cdot 1 = 3$

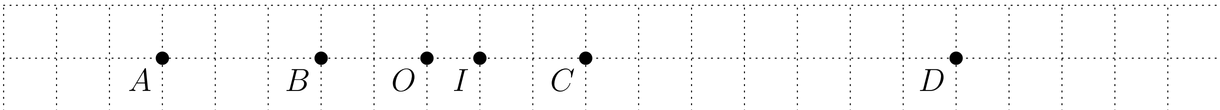
c) Déduis un encadrement de la distance $|AB|$ entre les points A et B.
Réponse : $2 \cdot |OI| < |AB| < 3 \cdot |OI|$.
Quand il n'y a pas d'ambiguité sur l'unité utilisée, nous écrivons simplement $\boxed{2 < |AB| < 3}$

3.4 Remarques

Une longueur est une propriété de tout segment de droite.
Une distance est composée d'un nombre **positif** et d'une unité. **Le nombre positif dépend de l'unité choisie.**
Nous confondrons souvent la longueur d'un segment avec la distance entre ses extrémités qui est en fait une mesure de cette longueur sans que cela soit préjudiciable à la compréhension, bien au contraire.
Par exemple, nous dirons que la longueur du segment $[AB]$ est égale à 5 alors que 5 est une mesure de cette longueur, donc la distance entre ses extrémités dans l'unité choisie.
La précision de la mesure dépend de l'unité choisie et du nombre de décimales obtenues lors de la mesure.
Dans l'exemple précédent, on pourrait diviser par 10 le segment unité pour obtenir une mesure au dixième de l'unité près.
En divisant par 100 le segment unité, on obtiendrait une mesure au centième de l'unité près, donc avec deux décimales (chiffres après la virgule).
...
Dans la pratique, nous sommes limités à la fois par l'épaisseur de nos traits, la taille de nos points et la précision de nos instruments de mesure (notre compas ici).
Il existe aussi des limites du fait de la nature même des objets physiques : par exemple, la dimension d'un atome est de l'ordre de 10^{-10} mètre (0,0000000001 mètre).

Mais le mathématicien idéalise la situation et considère qu'il peut mesurer des distances avec une précision infinie ...
Dans les exercices, nous contournerons souvent ce problème en positionnant nos points sur des graduations, comme dans l'exercice suivant.

3.5 Exercice



En prenant comme segment unité $[OI]$, détermine les distances suivantes :

$|OI| = \ldots$ $\quad|BA| = \ldots$ $\quad|AB| = \ldots$

$|BC| = \ldots$ $\quad|CD| = \ldots$ $\quad|BD| = \ldots$ $\quad|BC| + |CD| = \ldots$

3.6 Propriétés de la distance entre deux points

Nous constatons les propriétés suivantes de la distance entre deux points quelconques A et B :

Propriété 3 : Distance

$|AB| = |BA|$ (Symétrie)

Propriété 4 : Distance

$|AB| \geq 0$ avec $|AB| = 0 \Leftrightarrow A = B$

$A = B$ signifie que les points A et B coïncident. On dit aussi que $\boxed{\textbf{les points } A \textbf{ et } B \textbf{ sont confondus}}$.
Rappelons que le contraire de **confondus** est **distincts**. Deux points distincts se situent à des positions différentes sur la feuille.

Propriété 5 : Distance

$M \in [AB] \Leftrightarrow |AB| = |AM| + |MB|$

$\boxed{\Leftrightarrow}$ se lit « est équivalent à » ou « si et seulement si ».
On a à la fois $M \in [AB] \Rightarrow |AB| = |AM| + |MB|$ **ET** $|AB| = |AM| + |MB| \Rightarrow M \in [AB]$
Lorsqu'un point M appartient à un segment $[AB]$, on dit aussi que $\boxed{M \textbf{ est entre } A \textbf{ et } B}$.
$\boxed{\text{Le segment de droite } [AB] \text{ est l'ensemble des points } M \text{ tels que } |AB| = |AM| + |MB|}$.

L'égalité $|AB| = |AM| + |MB|$ **caractérise** les points du segment $[AB]$.
On trouve aussi parfois la notation : $[AB] = \{M \text{ tels que } |AB| = |AM| + |MB|\}$.

Remarquons que l'égalité $|AB| = |AM| + |MB|$ est un cas limite de **l'inégalité triangulaire** que nous présenterons plus loin : $\boxed{|AB| \leq |AM| + |MB|}$.
Cette inégalité entre des distances est toujours vérifiée, quelle que soit la position du point M par rapport à A et B. Elle est très importante.

3.7 Point alignés

Définition 2 : Points alignés

Trois points A, B et C sont alignés signifie qu'ils appartiennent à une même droite.

Propriété 6 : Caractérisation de l'alignement de trois points par la distance

Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si l'un d'eux est entre les deux autres

3.8 Exercice

On mesure $|EF| = 7$, $|FG| = 10$ et $|EG| = 3$.
Les points E, F et G sont-ils alignés ? Justifie ta réponse.

3.9 Demi-droite

Soient O et I deux points distincts. Ils définissent la droite OI obtenue en prolongeant le segment $[OI]$ par une **demi-droite** à chacune de ses deux extrémités.

La demi-droite $[OR$ est l'ensemble des points M tels que $|MO| + |OI| = |MI|$, c'est à dire l'ensemble des points M tels que O **est entre** M **et** I.

La demi-droite $[IS$ est l'ensemble des points M tels que $|OI| + |IM| = |OM|$, c'est à dire l'ensemble des points M tels que I **est entre** O **et** M.
La droite OI est la **réunion** du segment $[OI]$ et des demi-droites $[OR$ et $[IS$.

Cela s'écrit mathématiquement ainsi : $OI = [OR \cup [OI] \cup [IS$

$\boxed{\cup}$ est le symbole de **réunion**. Par exemple, $\{1{,}2\} \cup \{2{,}3\} = \{1{,}2{,}3\}$.

Le segment $[OI]$ et la demi-droite $[OR$ ont pour point commun le point O.
Cela s'écrit mathématiquement ainsi : $[OR \cap [OI] = \{O\}$
$\boxed{\cap}$ est le symbole d' **intersection**. Par exemple, $\{1{,}2\} \cap \{2{,}3\} = \{2\}$.

On a aussi $[IS \cap [OI] = \{I\}$

3.10 Ensembles disjoints - Soustraction ensembliste - segment ouvert

$\{1{,}2\} \cap \{3{,}4\} = \emptyset$.
On dit que les ensembles $\{1{,}2\}$ et $\{3{,}4\}$ sont **disjoints**.
$\boxed{\emptyset}$ est le symbole de l'**ensemble vide**.

Définition 3 : Ensembles disjoints

Deux ensembles sont disjoints si et seulement si leur intersection est l'ensemble vide. Ils n'ont aucun élément en commun.

Deux figures géométriques (ensembles de points) sont donc disjointes si et seulement si elles n'ont aucun point en commun.

$]OI[= [OI] \setminus \{O; I\}$ est le **segment de droite ouvert** d'extrémités O et I. Il est obtenu à partir du segment $[OI]$ en lui **enlevant** ses extrémités O et I.
Ainsi la droite OI est la réunion de trois figures géométriques disjointes : $OI = [OR \cup]OI[\cup [IS$

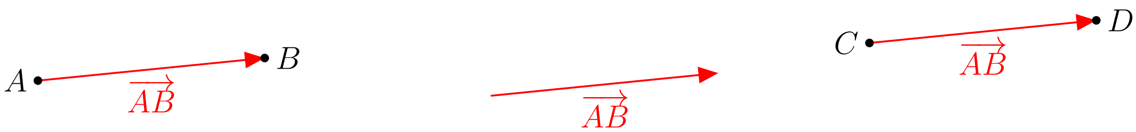
4 Vecteur

4.1 Décrire un changement de position (un déplacement)

Dans ce cours, les vecteurs permettent de décrire un **changement de position** (aussi appelé **déplacement**). En physique, ils permettent aussi de décrire une vitesse, une accélération, une force [1]
Pour définir un vecteur (et donc un déplacement), il suffit de se donner deux points et de préciser lequel des deux est le point de départ, l'autre étant alors le point d'arrivée.

Définition 4 : Représentation d'un vecteur par une flèche

Le changement de position permettant de passer de A à B est décrit par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et représenté par une flèche. Cette flèche peut être dessinée n'importe où !



A et C sont des **points de départ**. B et D sont des **points d'arrivée**.

Définition 5 : Longueur, direction et sens d'un vecteur

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ contient **trois informations** :

- Une longueur (celle du segment$[AB]$)
- Une direction (celle de la droite AB. Nous préciserons cette notion par la suite)
- Un sens (Il y a deux sens de déplacement sur la droite AB : de A vers B ou de B vers A.)

Définition 6 : Norme d'un vecteur

On appelle norme d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ la longueur du déplacement qu'il définit, c'est à dire la longueur du segment $[AB]$.
La norme de $\overrightarrow{AB}$ est notée $\|\overrightarrow{AB}\|$. On a par définition $\|\overrightarrow{AB}\| = |AB|$

1. Pour la force, il est nécessaire de préciser **en plus** le point sur lequel celle-ci est appliquée. Une force est ainsi décrite par un point d'application **et** un vecteur.

Définition 7 : Vecteurs égaux

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si :

1. Ils ont la même direction
2. Ils ont le même sens
3. Ils ont la même longueur

4.2 Vecteur directeur d'une droite, vecteur unitaire, repère d'une droite

Remarquons que les vecteurs définis à partir de deux points distincts d'une même droite **ont tous la même direction**, celle de la droite. Ceci permet la définition suivante :

Définition 8 : Vecteur directeur d'une droite

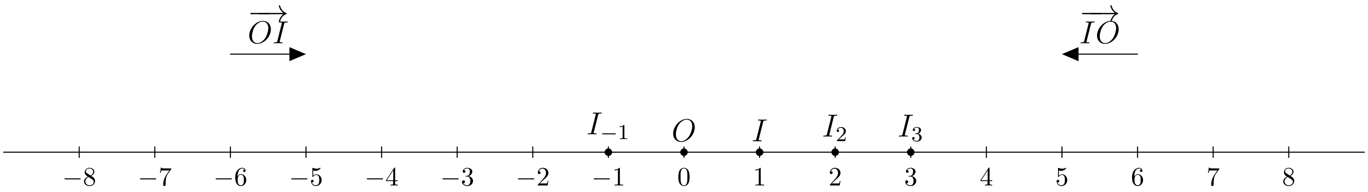
Deux points distincts quelconques A et B d'une droite permettent de définir un vecteur $\overrightarrow{AB}$ ayant la direction de la droite AB. Ce vecteur est appelé vecteur directeur de la droite AB.
Une droite a une infinité de vecteurs directeurs. Tout vecteur ayant la direction de la droite AB est un vecteur directeur de AB.

Définition 9 : Vecteur unitaire

Nous appelons vecteur unitaire un vecteur dont la longueur est égale à l'unité de longueur.

Donnons nous deux points distincts O et I. Ils définissent une droite OI.
Nous pouvons définir l'unité de longueur en posant $\|\overrightarrow{OI}\| = 1$.
$\overrightarrow{OI}$ est alors un vecteur unitaire. La distance de O à I est égale à 1 : $|OI| = 1$.
$\overrightarrow{OI}$ est aussi un vecteur directeur de la droite OI.

On écrit $\boxed{\overrightarrow{IO} = -\overrightarrow{OI}}$ pour indiquer que $\overrightarrow{IO}$ **a le sens opposé à celui de** $\overrightarrow{IO}$.
$\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{IO}$ ont cependant la même direction et la même longueur. Ainsi, $\overrightarrow{IO}$ est aussi un vecteur directeur unitaire de la droite OI.



Pour graduer la droite OI, nous avons d'abord construit l'unique point I_2 tel que $\overrightarrow{II_2} = \overrightarrow{OI}$.
Puisque $\overrightarrow{II_2} = \overrightarrow{OI}$, I_2 est aussi l'unique point vérifiant $\overrightarrow{OI_2} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{II_2} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OI} = 2\overrightarrow{OI}$

$\boxed{\overrightarrow{OI_2} = 2 \cdot \overrightarrow{OI} \text{ signifie que pour aller de } O \text{ à } I_2\text{, il faut faire 2 fois le déplacement défini par } \overrightarrow{OI}}$.

$\boxed{\overrightarrow{OI_3} = 3 \cdot \overrightarrow{OI} \text{ signifie que pour aller de } O \text{ à } I_3\text{, il faut faire 3 fois le déplacement défini par } \overrightarrow{OI}}$.

$\boxed{\overrightarrow{OI_{-1}} = -1 \cdot \overrightarrow{OI} \text{ signifie que pour aller de } O \text{ à } I_{-1}\text{, il faut faire 1 fois le déplacement défini par } \overrightarrow{IO}}$.

$\boxed{\overrightarrow{OI_{-2}} = -2 \cdot \overrightarrow{OI} \text{ signifie que pour aller de } O \text{ à } I_{-2}\text{, il faut faire 2 fois le déplacement défini par } \overrightarrow{IO}}$.

Définition 10 : Repère d'une droite d - abscisse d'un point

Définir un repère d'une droite d, c'est choisir :
1) Un point $O \in d$ appelé l'origine du repère
2) Un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de d appelé vecteur de la base associée au repère
On note $(O; \overrightarrow{u})$ le repère d'origine le point $O \in d$ et de vecteur de base $\overrightarrow{u}$.
$M \in d \Leftrightarrow \exists\ k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{OM} = k \cdot \overrightarrow{u}$
k est **l'abscisse de** M dans le repère $(O; \overrightarrow{u})$.
On note aussi x_M l'abscisse du point M dans le repère $(O; \overrightarrow{u})$. On a $\boxed{x_M = k}$

Un repère permet d'associer un nombre réel à tout point d'une droite.
Réciproquement, le repère permet aussi d'associer un point à chaque nombre réel.

Il y a autant de points sur une droite qu'il y a de nombres réels

$|x_M|$ s'interprète comme le résultat de la mesure de la longueur du segment $[OM]$:
Comme $\overrightarrow{OM} = x_M \cdot \overrightarrow{u}$, on a $|OM| = |x_M| \cdot \|\overrightarrow{u}\|$
Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire, on obtient simplement $|OM| = |x_M|$ car $\|\overrightarrow{u}\| = 1$.
Si x_M est positif, il faut parcourir la distance $|x_M|$ dans le sens indiqué par $\overrightarrow{u}$ pour aller de O à M.
Si x_M est négatif, il faut parcourir la distance $|x_M|$ dans le sens opposé à celui de $\overrightarrow{u}$ pour aller de O à M.
Dans les deux cas, il faut évidemment aussi se déplacer dans la direction définie par $\overrightarrow{u}$, donc rester sur la droite d puisqu'on part de O, l'origine du repère et que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de d.

4.3 Équation vectorielle d'une droite

Définition 11 : Équation vectorielle d'une droite

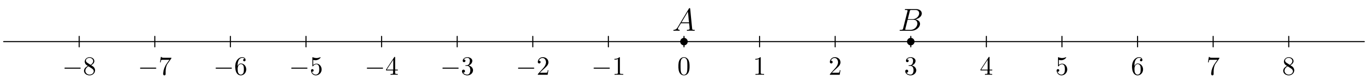
Deux points distincts A et B définissent une droite.
On appelle équation vectorielle de la droite AB, c'est à dire de la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, l'équation $\overrightarrow{AM} = k\,\bullet\,\overrightarrow{AB}$ avec $k \in \mathbb{R}$

En fait, il faudrait l'appeler « équation vectorielle **paramétrique** de la droite AB ».
En effet, le nombre réel k joue le rôle de paramètre.
À chaque valeur de k, il correspond un point unique sur la droite AB et réciproquement.

Une écriture plus explicite est : $\boxed{M \in AB \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = k\,\bullet\,\overrightarrow{AB}}$

$k = x_M$ est l'abscisse du point M dans le repère $(A; \overrightarrow{AB})$, d'origine A et de vecteur de base $\overrightarrow{AB}$.

4.4 Exercice



Dessine sur la droite AB si dessus, les points définis par : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{AF} = \frac{8}{3}\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{AH} = -\frac{7}{3}\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{BI} = -\frac{7}{3}\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{BJ} = -\frac{11}{3}\overrightarrow{AB}$