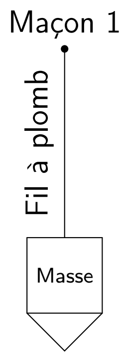
Droites parallèles - Plan - Cercle

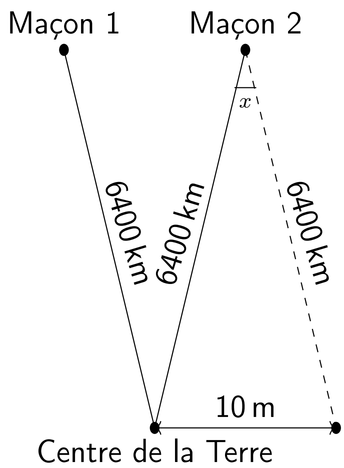
1 Droites parallèles

1.1 La direction verticale des maçons



Prenons un fil à plomb utilisé par les maçons pour vérifier la verticalité d'un mur.
Demandons à un premier maçon de tenir le fil à une extrémité et de le laisser pendre librement, tendu par le poids de la masse attachée à son autre extrémité.
Le fil montre alors la direction verticale du lieu.
Demandons à un deuxième maçon d'effectuer la même expérience mais éloigné horizontalement de 10 mètres du premier maçon.
Les maçons considèrent que les deux fils à plomb sont parallèles c'est à dire qu'ils ont la même direction, la verticale.
En fait, les mathématiciens ne seront pas d'accord.
En effet, **si on prolonge ces deux fils, par la pensée comme des vrais mathématiciens, ils vont se couper au centre de gravité de la Terre. Or, des droites parallèles distinctes ne se coupent jamais**.

Le centre de gravité de la Terre se trouve à 6400 km de la surface terrestre.
Ainsi après 6400 kilomètres, le point de la parallèle (en pointillés sur le schéma ci-dessous) à la verticale du maçon 1, passant par le maçon 2, se situe à 10 mètres du centre de gravité de la Terre.



Le dessin ci-contre n'est pas à l'échelle ce qui implique que les droites dessinées sont très éloignées de la verticale.
Notons x la distance entre le point sur la droite définie par le fil à plomb du second maçon et le point sur la droite en pointillés après un déplacement de 100 mètres sur chacune de ces droites .
En utilisant les propriétés des triangles semblables (que nous étudierons dans un prochain document), nous pouvons écrire :
$\frac{x}{100} = \frac{10}{6400 * 1000}$, soit $x = \frac{1}{6400} \approx 0{,}16\,\text{mm}$
Supposons que les maçons construisent un immeuble de 100 mètres de hauteur. Si la distance entre les deux verticales est de 10 mètres en haut de l'immeuble, cette distance ne sera plus que de 9,999 84 m au niveau du sol.
La précision avec laquelle les maçons mesurent les distances ne permet pas de remarquer un quelconque problème de parallélisme et de verticalité. Les maçons peuvent considérer à juste titre que les droites définies par les fils à plomb sont toutes parallèles et verticales.

1.2 Les rails de chemin de fer

La distance qui sépare les deux roues d'un essieu de train doit être égale à la distance des points de contacts de ces deux roues sur les deux rails.
Comme le train avance, cette distance entre les rails doit se conserver (si la distance entre les roues est conservée).
Si le train roule en ligne droite, les deux rails définissent des droites parallèles.

1.3 Droites parallèles et direction

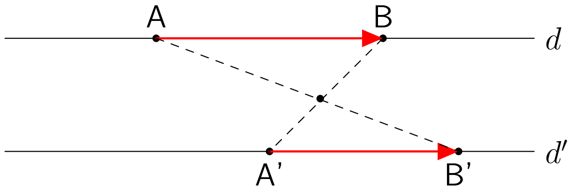
Nous avons vu qu'**un segment de droite a une propriété appelée sa longueur**.
Deux segments ont la même longueur si et seulement si ils sont superposables.
L'outil pour déterminer que deux segments ont la même longueur est le compas (aux erreurs de mesures près).
Nous pouvons également dire qu'**une droite a une propriété appelée sa direction**.
Deux droites ont la même direction si et seulement si elles sont parallèles.
Mais comment vérifier que deux droites sont parallèles avec un compas ?
Les deux exemples précédents nous suggèrent de vérifier que **la distance entre deux points est conservée après un déplacement d'une même longueur, dans le même sens**.

1.4 Droites parallèles et sens

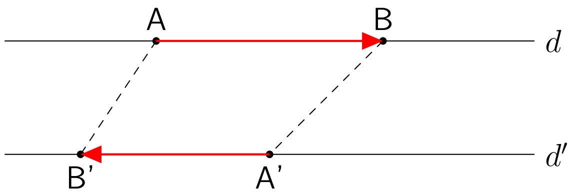
Nous avons déjà observé qu'il y a deux sens de déplacement sur une droite. Mais si on a deux droites distinctes, **que signifie se déplacer dans le même sens ?**
Si les droites ne sont pas parallèles, nous ne pouvons pas comparer les sens de déplacement : « cela n'a aucun sens ! »

Considérons que les droites d et d' sont distinctes **ET** parallèles.
Donnons nous deux points A et B avec A comme point de départ (et donc B comme point d'arrivée) sur d. Ils définissent le déplacement (vecteur) $\overrightarrow{AB}$.
Donnons nous un point $A' \in d'$ qui jouera le rôle de point de départ sur d'.
Nous avons deux façons de placer B' sur d' :

À droite de A', alors les déplacements $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ont le même sens et les segments $[AB']$ et $[A'B]$ se coupent.



À gauche de A', alors les déplacements $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ n'ont pas le même sens et les segments $[AB']$ et $[A'B]$ ne se coupent pas.



Propriété 1 : Déplacements de même sens sur deux droites parallèles distinctes
Supposons que les droites AB et $A'B'$ sont distinctes et parallèles, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ (qui ont même direction) ont même sens **si et seulement si** les segments $[AB']$ et $[A'B]$ se coupent en un point.

Nous venons de caractériser la notion de déplacement de « même sens ». Mais nous n'avons pas encore complètement caractérisé la notion de droites distinctes parallèles.
La construction du plan va nous permettre de découvrir un autre aspect de la notion de droites parallèles.

2 Plan

2.1 Tracer des segments de droites sur notre feuille

Nous avons supposé savoir tracer des droites (ou segments de droite) sur notre feuille à l'aide d'une règle. Mais pour cela **il faut que chaque point du segment de droite puisse correspondre à un point sur la feuille** !

2.2 Intersection d'une droite et d'un plan

Soient A et B deux points sur notre feuille, pour pouvoir tracer le segment $[AB]$ sur notre feuille, il faut que tous les points du segment $[AB]$ (tous les points entre A et B) soient des points de la feuille. $[AB]$ « doit être inclus » dans la feuille.

Propriété 2 : Plan et droite

Si un plan α contient deux points distincts A et B d'une droite, alors il contient toute la droite AB.

Mathématiquement : $A \in \alpha$ ET $B \in \alpha \quad \Rightarrow \quad AB \subset \alpha$
Ou encore : $A \in \alpha$ ET $B \in \alpha \quad \Rightarrow \quad AB \cap \alpha = AB$

$AB \subset \alpha \quad \Leftrightarrow \quad AB \cap \alpha = AB \quad \Leftrightarrow$ « Tout point de la droite AB est un point du plan α »

Considérons une droite d et un plan α. Une, et une seule des trois situations ci-dessous est possible :

Propriété 3 : Cas d'intersection d'une droite avec un plan

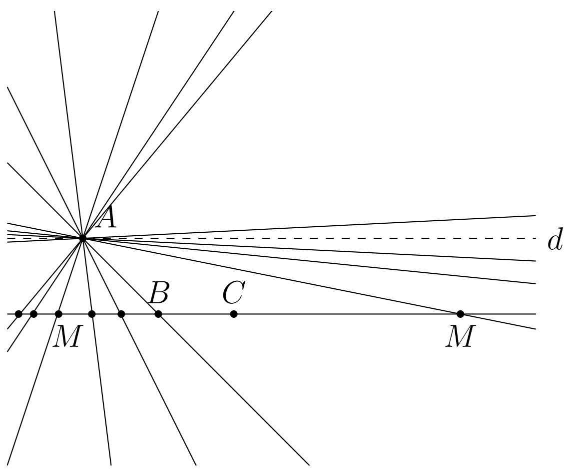
$d \cap \alpha = \emptyset$ La droite d et le plan α sont disjoints. On dit aussi que d est strictement parallèle à α.

$d \cap \alpha = \{M\}$ La droite d traverse le plan en le coupant en M.
M est **le point de percée** de d dans α.

$d \cap \alpha = d$ La droite d est incluse dans le plan

2.3 Plan et droites parallèles

Soient A, B et C trois points **non alignés**.
Le plan contenant ces trois points peut se construire en effectuant la réunion de toutes les droites définies par A et un point quelconque M de la droite BC.



Lorsque la distance $|AM|$ est très supérieure à $|AB|$ et à $|AC|$, la droite AM s'approche d'une droite limite d (en pointillés sur le dessin ci-contre), **l'unique droite parallèle à BC passant par A.**

Contrairement aux droites AM, cette droite ne coupe pas la droite BC.
Il faut donc l'ajouter aux droites AM pour obtenir tous les points du plan ABC
Dans cette construction, le mathématicien idéalise encore la situation. Nous avons déjà vu qu'il considère que nous pouvons mesurer une distance avec une précision infinie (et ainsi associer exactement un

nombre réel à tout point sur la droite), il imagine maintenant **la droite** d **qui passe par** A **et qui coupe** BC **« à l'infini »**, et il appelle cette droite la parallèle à BC passant par A.
Attention, les droites qui se rapprochent de d sont des droites « AM ». Elles coupent BC en un point M qui existe mais qu'on ne sait pas toujours dessiner sur le schéma.
Si on reprend le premier exemple avec les maçons, les verticales données par le fil à plomb semblent parallèles car le centre de gravité de la Terre est très éloigné par rapport à la distance qui sépare les maçons. Les maçons peuvent alors considérer que ces verticales se rejoignent « à l'infini », même si cet « infini » est en réalité atteint à une distance de 6400 km (distance très grande par rapport aux dimensions des édifices qu'ils construisent).

Propriété 4 : Existence et unicité

Soient A, B et C trois points **non alignés**.
Il passe un plan, et un seul, passant par A, B et C.

Nous pouvons donc noter ABC l'unique plan passant par les trois points non alignés A, B et C. Nous avons « construit » ce plan précédemment à la manière des mathématiciens (La réunion de toutes les droites AM quand M parcourt la droite BC à laquelle on ajoute les points de la parallèles à BC passant par A).

2.4 Axiome d'Euclide

Propriété 5 : Axiome d'Euclide

Soit une droite BC et un point A n'appartenant pas à cette droite ($A \notin BC$).
Il existe une droite d unique, incluse dans le plan ABC ($d \subset ABC$), passant par A ($A \in d$) et disjointe de BC ($d \cap BC = \emptyset$).
La droite d est appelée **la** parallèle à la droite BC passant par A.

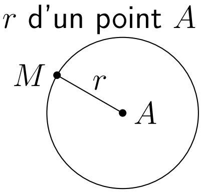
2.5 Cercle

Définition 1 : Cercle

L'ensemble des points du plan situés à une même distance r d'un point A est un **cercle**.

A est appelé le **centre du cercle**.
r est un nombre positif appelé le **rayon du cercle**.

$\mathcal{C}(A; r) = \{M \text{ du plan tels que } |AM| = r\}$



Pour dessiner un cercle, et ainsi **obtenir tous les points de la feuille situés à une certaine distance (rayon) d'un de ses points (centre)**, on utilise un compas.

Considérons trois points non alignés A, B et C sur notre feuille.
Maintenant que nous savons tracer, avec un compas, l'ensemble des points M du plan situés à une certaine distance r d'un point A appartenant à ce plan, nous allons pouvoir expérimenter et découvrir comment tracer la parallèle d à la droite BC passant pas A dans notre prochain document.