

Les nombres connus en milieu de secondaire

A Les nombres

A.1 Les ensembles de nombres : de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$ est l'ensemble des **entiers naturels**.

Les entiers naturels nous permettent de compter. Quand on additionne deux entiers naturels, on obtient un entier naturel. **Mais** la différence de deux entiers naturels n'est pas forcément un entier naturel. Par exemple « $2 - 3$ » n'est pas un entier naturel.

$\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$ est l'ensemble des **entiers**, c'est à dire l'ensemble des nombres qui peuvent s'interpréter comme **différence de deux éléments de $\mathbb{N}$** .

L'addition et la soustraction sont stables dans $\mathbb{Z}$. **Mais** le quotient de deux entiers n'est pas forcément un entier. Par exemple « $2 \div 3$ », qu'on préfère écrire « $\frac{2}{3}$ », n'est pas un entier.

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres **rationnels**, c'est à dire l'ensemble des nombres qui peuvent s'interpréter comme **quotient de deux éléments de $\mathbb{Z}$** .

L'addition, la soustraction, la multiplication et la division sont stables dans $\mathbb{Q}$.

On constate en posant le calcul d'une division de deux entiers, que le développement décimal du résultat (le quotient) sera forcément **périodique**. (voir ressource <https://ophysis.net/course/section.php?id=37>). De même, on sait comment écrire un nombre ayant un développement décimal périodique sous la forme d'un quotient de deux entiers.

Autrement dit, un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique.

Ceci s'écrit aussi : $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x$ a un développement décimal périodique

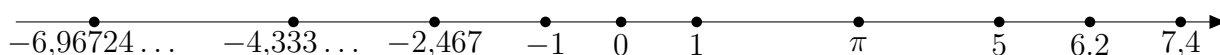
Mais la mesure de la longueur d'un segment, par exemple, peut conduire à un nombre qui n'a pas forcément un développement périodique !

Un nombre qui a développement décimal qui n'est pas périodique est dit **irrationnel**.

Par exemple, $\sqrt{2}$ et π sont des nombres irrationnels.

$\mathbb{R}$ est appelé l'ensemble des **nombres réels**. $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{irrationnels}\}$ ¹

Les nombres réels (ou tout simplement « les réels ») sont les nombres correspondant aux **abscisses des points sur une droite graduée**.



À tout nombre réel correspond un point unique sur une droite munie d'un repère (droite graduée).

Réciproquement, à tout point sur une droite graduée correspond un nombre réel unique.

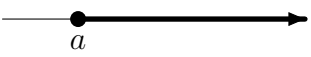
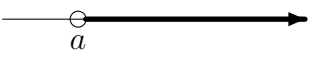
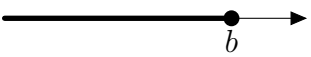
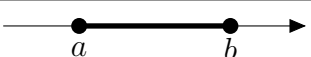
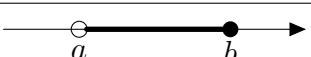
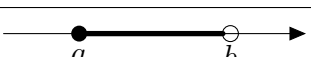
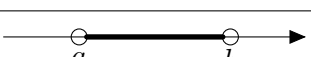
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. On rappelle que $A \subset B$ se lit « A est inclus dans B » et signifie que tout élément de l'ensemble A est aussi un élément de l'ensemble B . Par exemple, tout entier naturel est aussi un nombre réel.

1. $A \cup B$ se lit « A union B », c'est l'ensemble obtenu en réunissant les éléments de A et les éléments de B . Par exemple, $\{1; 2; 3\} \cup \{2; 3; 4; 5\} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

A.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

On suppose que $a \in \mathbb{R}$ ² et aussi $b \in \mathbb{R}$.

Autrement dit, a et b sont des nombres réels.

Définition ensembliste	Intervalle	Représentation
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	$[a; +\infty[$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	$]a; +\infty[$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$	$]-\infty; b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	$]-\infty; b[$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	$[a; b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	$]a; b]$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	$[a; b[$	
$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	$]a; b[$	

Exercice : Donne la représentation graphique et la définition ensembliste de l'intervalle $]-\infty; 4[$.

2. $a \in \mathbb{R}$ se lit « a appartient à $\mathbb{R}$ ». Le terme à gauche du symbole d'appartenance $\in$ est appelé « **élément** ». Le terme situé à droite de $\in$ est appelé « **ensemble** ».