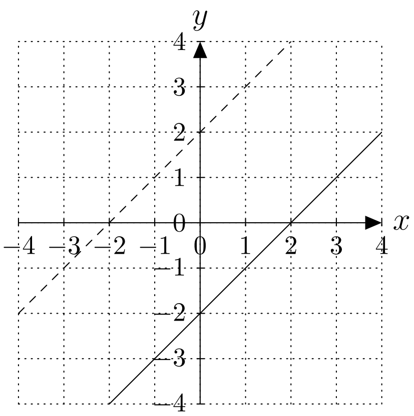
1 Définition

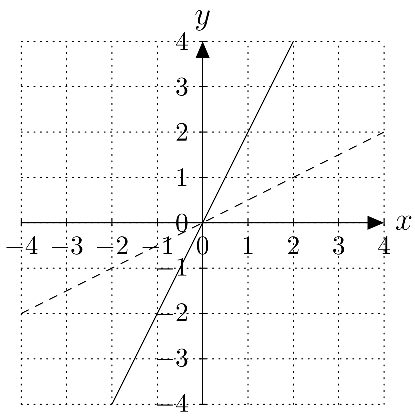
Deux fonctions sont dites **réciproques** l'une de l'autre si et seulement :

$\boxed{\forall x \in \text{dom}g,\ f(g(x)) = x}$ ET $\boxed{\forall x \in \text{dom}f,\ g(f(x)) = x}$

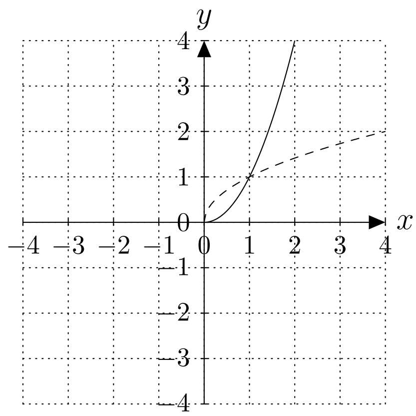
2 Exemples de fonctions réciproques l'une de l'autre



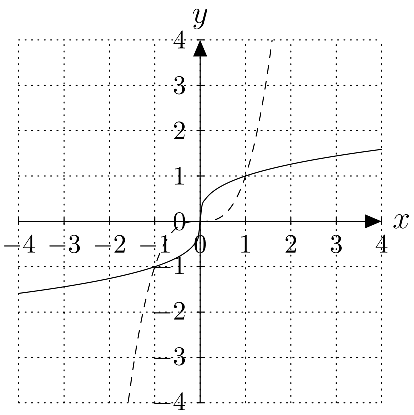
$x + 2$ et $x - 2$



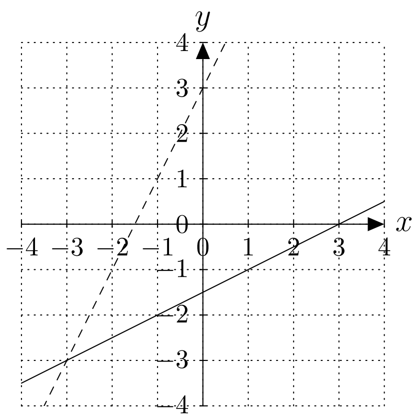
$\frac{x}{2}$ et $2x$



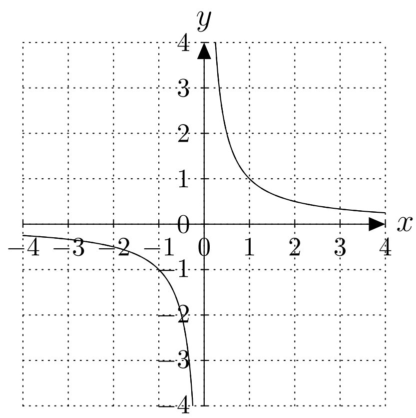
$\sqrt{x}$ et x^2 **avec** $x \geq 0$



x^3 et $\sqrt[3]{x}$



$2x + 3$ et $\frac{x-3}{2}$



$\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x}$

3 Propriétés

Deux fonctions f et g sont réciproques l'une de l'autre signifie que **pour tout point** $(x; y)$:

$\boxed{(x; y) \in G_f \quad \Leftrightarrow \quad (y; x) \in G_g}$ qui peut aussi s'écrire $\boxed{y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = g(y)}$

Ainsi :

$\boxed{\text{Les graphes de } f \text{ et } g \text{ sont symétriques par rapport à la droite d'équation } y = x}$

$\boxed{\text{dom}f = \text{im}g}$ ET $\boxed{\text{dom}g = \text{im}f}$.

4 Condition d'existence d'une fonction réciproque

Une fonction f admet une fonction réciproque **si et seulement si**
Tout élément de son ensemble image im$f$ admet un antécédent unique.
$\boxed{\forall y \in \text{im}f, \exists!\ x \in \text{dom}f,\ y = f(x)}$. Le symbole $\boxed{\exists!}$ se lit « il existe un et un seul ».

5 Recherche des antécédents de y par la fonction x^2

Considérons la fonction carrée x^2. La recherche des antécédents d'un nombre y connu par la fonction x^2 conduit à résoudre l'équation $x^2 = y$ d'inconnue x.
Graphiquement, on voit que :

- pour $y < 0$, l'équation $x^2 = y$ n'a pas de solution. (Un carré ne peut pas être strictement négatif)
- pour $y = 0$, l'équation $x^2 = y$ a une solution unique : $x = 0$
- pour $y > 0$, l'équation $x^2 = y$ a deux solutions opposées. La solution positive est notée $\sqrt{x}$, l'autre est alors notée $-\sqrt{x}$.

6 Définition de la fonction racine carrée $\sqrt{x}$

La fonction x^2 n'a pas de fonction réciproque (puisque les $y > 0$ ont deux antécédents).
Cependant, si on restreint son ensemble de définition à $\mathbb{R}^+$, on obtient un nouveau graphe (et donc une nouvelle fonction carrée x^2 **mais utilisable uniquement si** $x \geq 0$).

$\boxed{\text{Cette nouvelle fonction a une réciproque : la fonction racine carrée } \sqrt{x}}$.

Autrement dit, sous la condition $x \geq 0$,

$\boxed{(x;y) \in G_{x^2} \quad \Leftrightarrow \quad (y;x) \in G_{\sqrt{x}}}$ qui peut aussi s'écrire $\boxed{y = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{y}}$

ATTENTION : Ces équivalences ne sont plus correctes lorsque $x < 0$.
En effet, **on retiendra** que $\boxed{\sqrt{x^2} = x \text{ si } x \geq 0}$ **MAIS** $\boxed{\sqrt{x^2} = -x \text{ si } x < 0}$

On écrit aussi souvent que pour tout nombre x, $\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$.

$\boxed{|x| = x \text{ si } x \geq 0}$ **MAIS** $\boxed{|x| = -x \text{ si } x < 0}$

7 Fonctions réciproques et résolution d'équation

Les fonctions réciproques sont très utiles pour résoudre des équations.
On passe d'une équation à une équation équivalente en appliquant une fonction **qui admet une réciproque** à chaque membre de l'égalité.
Par exemple,
$x + 2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$
L'implication $\boxed{\Rightarrow}$ est obtenue en appliquant la fonction $x - 2$ à chaque membre.
L'inplication réciproque $\boxed{\Leftarrow}$ est obtenue en appliquant la fonction réciproque $x + 2$ à chaque membre.