1 Fonction rationnelle

Une fonction rationnelle a pour expression le quotient de deux polynômes.

2 Objectifs et notation

Étudier le comportement d'une fonction rationnelle aux bornes de son domaine de définitions.

3 Exemple

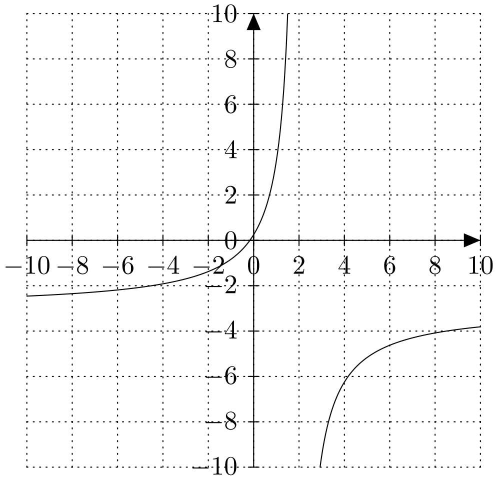
$f(x) = \dfrac{6x+1}{4-2x}$, on a alors dom$f =]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ car on ne peut pas diviser par 0.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{-2x} = -3 \Longrightarrow \text{A.H.} \quad y=-3$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \frac{13}{0^+} = +\infty \Longrightarrow \text{A.V.} \quad x=2$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \frac{13}{0^-} = -\infty \Longrightarrow \text{A.V.} \quad x=2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{-2x} = -3 \Longrightarrow \text{A.H.} \quad y=-3$$



Pour préciser le signe de l'infini (et donc la position du graphe par rapport aux A.V.), il faut **étudier le signe du dénominateur** (donc le signe de $4-2x$).

4 Droite Asymptote Horizontale : A.H.

L'infini est une borne du domaine de définition ($x \to \pm\infty$).

f admet une asymptote horizontale (A.H.) d'équation $y=a$ en $+\infty \Longleftrightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$

f admet une asymptote horizontale (A.H.) d'équation $y=a$ en $-\infty \Longleftrightarrow \displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$

Pour étudier la limite en l'infini d'une fonction rationnelle, **on ne conserve que le terme de plus haut degré de chacun des deux polynômes** (numérateur et dénominateur).
Soit n le degré du numérateur et d celui du dénominateur.
$\boxed{\text{Si } n<d}$, alors f admet une $A.H.$ d'équation $y=0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3+2x-2}{2x^5-x^4+2x^2+18} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^3}{2x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{2x^2} = \frac{5}{2\,(+\infty)^2} = 0$$

$\boxed{\text{Si } n=d}$, alors f admet une $A.H.$ **différente de** $y=0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^5+2x-2}{2x^5-x^4+2x^2+18} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^5}{2x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \qquad \text{A.H. } y=\frac{5}{2}$$

$\boxed{\text{Si } n>d}$, alors f n'a pas d'asymptotes horizontales (f a une asymptote oblique si $n=d+1$).

$\boxed{5}$ Droite Asymptote Verticale (A.V.) OU point vide

Le nombre a est une borne du domaine de définition ($x \to a$), et $x \notin \text{dom} f$.

f admet une asymptote verticale (A.V.) d'équation $x=a$ **à gauche de** a $\iff \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$

f admet une asymptote verticale (A.V.) d'équation $x=a$ **à droite de** a $\iff \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

Pour étudier la limite quand x tend vers un nombre a, il faut remplacer la variable x par a. Le dénominateur vaut alors 0. Il faut étudier son signe quand x tend vers a pour trouver le signe de l'infini.

ATTENTION, si on tombe sur une forme indéterminée (F.I.) $\frac{0}{0}$, il faut factoriser les polynomes pour simplifier. On peut alors trouver une limite finie b en une borne finie a du domaine de définition, donc **un point vide** de coordonnées $(a;b)$ (car $a \notin \text{dom} f$).

$\boxed{6}$ Droite Asymptote Oblique : A.O.

L'infini doit être aux bornes du domaine de définition. On étudie alors, comme pour les asymptotes horizontales, ce qu'il se passe quand la variable x tend vers l'infini.
On a déjà vu si le degré n du numérateur est inférieur ou égal à celui d du dénominateur ($n \leq d$), alors on a une asymptote horizontale.

$\boxed{\text{Si } n=d+1}$, alors on a une asymptote oblique.

f admet une Asymptote Oblique (A.O.) d'équation $y=mx+p$ en $\pm\infty \iff \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x)-(mx+p)] = 0$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x-2}{x-1} - (2x+3) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1}{x-1} = 0$$

Donc f admet la droite d'équation $\boxed{y=2x+3}$ comme A.O.

En effet, la **division euclidienne** de $2x^2+x-2$ par $x-1$ permet de trouver que :
$2x^2+x-2 = (x-1)\cdot(2x+3)-1$

Et donc : $\dfrac{2x^2+x-2}{x-1} = \boxed{2x+3} + \dfrac{-1}{x-1}$