

1 Fonction rationnelle

Une fonction rationnelle a pour expression le quotient de deux polynômes.

2 Objectifs et notation

Étudier le comportement d'une fonction rationnelle aux bornes de son domaine de définitions.

3 Exemple

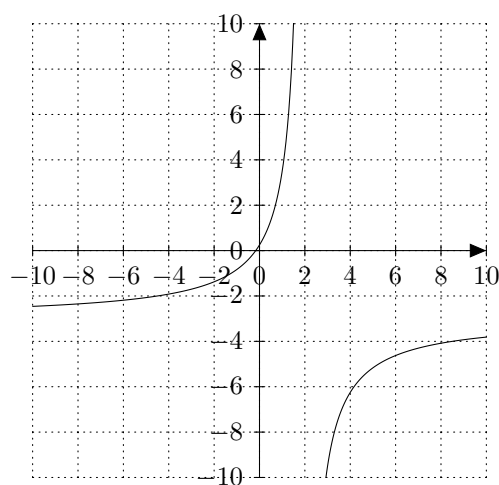
$f(x) = \frac{6x+1}{4-2x}$, on a alors $\text{dom } f =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ car on ne peut pas diviser par 0.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{-2x} = -3 \Rightarrow \text{A.H. } y = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{13}{0^+} = +\infty \Rightarrow \text{A.V. } x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{13}{0^-} = -\infty \Rightarrow \text{A.V. } x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{-2x} = -3 \Rightarrow \text{A.H. } y = -3$$



Pour préciser le signe de l'infini (et donc la position du graphe par rapport aux A.V.), il faut **étudier le signe du dénominateur** (donc le signe de $4 - 2x$).

4 Droite Asymptote Horizontale : A.H.

L'infini est une borne du domaine de définition ($x \rightarrow \pm\infty$).

f admet une asymptote horizontale (A.H.) d'équation $y = a$ en $+\infty \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$

f admet une asymptote horizontale (A.H.) d'équation $y = a$ en $-\infty \iff \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$

Pour étudier la limite en l'infini d'une fonction rationnelle, **on ne conserve que le terme de plus haut degré de chacun des deux polynômes** (numérateur et dénominateur).

Soit n le degré du numérateur et d celui du dénominateur.

Si $n < d$, alors f admet une A.H. d'équation $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + 2x - 2}{2x^5 - x^4 + 2x^2 + 18} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3}{2x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{2x^2} = \frac{5}{2(+\infty)^2} = 0$$

Si $n = d$, alors f admet une A.H. **différente de** $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^5 + 2x - 2}{2x^5 - x^4 + 2x^2 + 18} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^5}{2x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{A.H. } y = \frac{5}{2}$$

Si $n > d$, alors f n'a pas d'asymptotes horizontales (f a une asymptote oblique si $n = d + 1$).

5 Droite Asymptote Verticale (A.V.) OU point vide

Le nombre a est une borne du domaine de définition ($x \rightarrow a$), et $a \notin \text{dom } f$.

f admet une asymptote verticale (A.V.) d'équation $x = a$ à gauche de $a \iff \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$

f admet une asymptote verticale (A.V.) d'équation $x = a$ à droite de $a \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$

Pour étudier la limite quand x tend vers un nombre a , il faut remplacer la variable x par a . Le dénominateur vaut alors 0. Il faut étudier son signe quand x tend vers a pour trouver le signe de l'infini.

ATTENTION, si on tombe sur une forme indéterminée (F.I.) $\frac{0}{0}$, il faut factoriser les polynômes pour simplifier. On peut alors trouver une limite finie b en une borne finie a du domaine de définition, donc un point vide de coordonnées $(a; b)$ (car $a \notin \text{dom } f$).

6 Droite Asymptote Oblique : A.O.

L'infini doit être aux bornes du domaine de définition. On étudie alors, comme pour les asymptotes horizontales, ce qu'il se passe quand la variable x tend vers l'infini.

On a déjà vu si le degré n du numérateur est inférieur ou égal à celui d du dénominateur ($n \leq d$), alors on a une asymptote horizontale.

Si $n = d + 1$, alors on a une asymptote oblique.

f admet une Asymptote Oblique (A.O.) d'équation $y = mx + p$ en $\pm\infty \iff \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + p)] = 0$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + x - 2}{x - 1} - (2x + 3) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-1}{x - 1} = 0$$

Donc f admet la droite d'équation $y = 2x + 3$ comme A.O.

En effet, la division euclidienne de $2x^2 + x - 2$ par $x - 1$ permet de trouver que :

$$2x^2 + x - 2 = (x - 1) \cdot (2x + 3) - 1$$

$$\text{Et donc : } \frac{2x^2 + x - 2}{x - 1} = 2x + 3 + \frac{-1}{x - 1}$$

