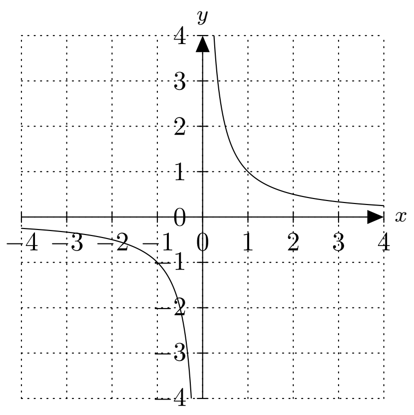
1 La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ de $\mathbb{R}_0$ dans $\mathbb{R}_0$



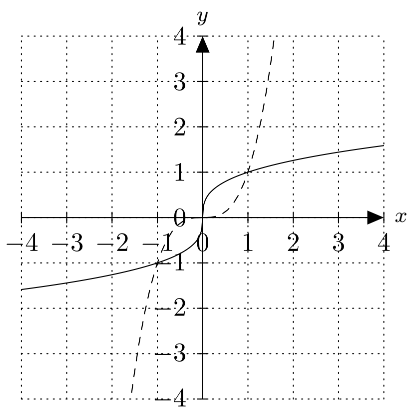
Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et est sa propre réciproque.

On peut toujours écrire lors d'une recherche d'antécédents de $y \neq 0$ par la fonction inverse :

$$\frac{1}{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{y} \qquad\qquad x \neq 0 \qquad y \neq 0$$

On applique la fonction inverse dans un sens comme dans l'autre !

2 Les fonctions cube x^3 et racine cubique $\sqrt[3]{x}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$



Ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et réciproques l'une de l'autre.

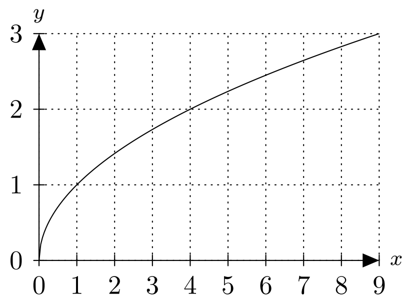
On peut toujours écrire lors d'une recherche d'antécédents de y par la fonction cube :

$$x^3 = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{y}$$

Ou, pour une recherche d'antécédents de y par la fonction racine cubique :

$$\sqrt[3]{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad x = y^3$$

3 La fonction racine carrée $f(x) = \sqrt{x}$ **dom**$f = \mathbb{R}^+$ **im**$f = \mathbb{R}^+$



La fonction racine carrée admet pour réciproque la fonction carré **d'ensemble de définition** $\mathbb{R}^+$.

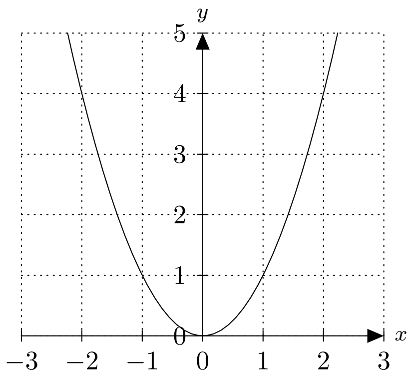
$$\sqrt{x} = y \quad \Leftrightarrow \quad x = y^2 \qquad\qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

Pour tout nombre $y \geq 0$ donné, $\boxed{\mathrm{Ant}_y \sqrt{x} = \{y^2\}}$

4 Remarque

$(\sqrt{x})^2 = x$ est toujours vraie dès lors que $x \geq 0$ (condition d'existence de $\sqrt{x}$).
Par contre : $\sqrt{x^2} = x$ n'est vraie que si $x \geq 0$
Sinon : $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x$ si $x < 0$
En fait, pour tout nombre $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$

5 La fonction carré $f(x) = x^2$ **dom**$f = \mathbb{R}$ **im**$f = \mathbb{R}^+$



Soit y un nombre donné. On veut résoudre l'équation $x^2 = y$

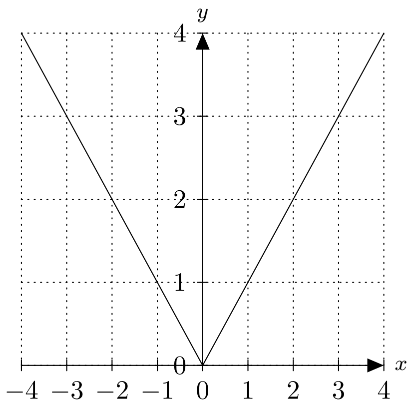
Si $\boxed{y < 0}$, cette équation n'a pas de solution : $\boxed{\mathrm{Ant}_y x^2 = \emptyset}$

Supposons $\boxed{y \geq 0}$, $x^2 = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{y}$
Si $x \geq 0$, $\sqrt{x^2} = x$ et donc $x = \sqrt{y}$
Si $x < 0$, $\sqrt{x^2} = \sqrt{(-x)^2} = -x$ et donc $-x = \sqrt{y}$, soit $x = -\sqrt{y}$

Pour tout nombre $y \geq 0$ $\boxed{\mathrm{Ant}_y x^2 = \left\{-\sqrt{y}; \sqrt{y}\right\}}$
Remarque : si $y = 0$, $\mathrm{Ant}_0 x^2 = \left\{-\sqrt{0}; \sqrt{0}\right\} = \{0; 0\} = \{0\}$

On retiendra que $\boxed{\text{si } y \geq 0, \quad x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y} \text{ OU } x = -\sqrt{y}}$

6 La fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ **dom**$f = \mathbb{R}$ **im**$f = \mathbb{R}^+$



Soit y un nombre donné. On veut résoudre l'équation $|x| = y$

Si $\boxed{y < 0}$, cette équation n'a pas de solution : $\boxed{\mathrm{Ant}_y |x| = \emptyset}$

Supposons $\boxed{y \geq 0}$,
Si $x \geq 0$, $|x| = x$ et donc $x = y$
Si $x < 0$, $|x| = -x$ et donc $-x = y$, soit $x = -y$

Pour tout nombre $y \geq 0$ $\boxed{\mathrm{Ant}_y |x| = \{-y; y\}}$
Remarque : si $y = 0$, $\mathrm{Ant}_0 |x| = \{-0; 0\} = \{0; 0\} = \{0\}$

On retiendra que $\boxed{\text{si } y \geq 0, \quad |x| = y \Leftrightarrow x = y \text{ OU } x = -y}$

7 Commentaire sur les deux principes d'équivalence pour résoudre une équation

Principe d'équivalence 1 $x + c = y \Leftrightarrow x = y - c$

On dit « on ajoute le nombre $-c$ à chacun des deux membres de l'équation ».
Il serait plus précis de dire « on **applique la fonction** $x - c$ aux deux membres de l'équation ».
La fonction $x - c$ est la réciproque de la fonction $x + c$.

Principe d'équivalence 2 ($a \neq 0$) $a \cdot x = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y}{a}$

On dit « on multiplie par le nombre $\dfrac{1}{a}$ chacun des deux membres de l'équation ».
Il serait plus précis de dire « on **applique la fonction** $\dfrac{x}{a}$ aux deux membres de l'équation ».
La fonction $\dfrac{x}{a}$ est la réciproque de la fonction $a \cdot x$.