

Catégorie : Secondaire

Cours : Géométrie dans le plan

Section : Droites-Plans

Géométrie dans le plan



Droites - Plans

1 Droites

1.1 Segments de droite

Un **segment de droite** est un objet idéal (imaginé parfait par le géomètre mathématicien).

Sa forme s'inspire, par exemple :

1. du chemin suivi par un rayon de lumière entrant dans une pièce obscure à travers un petit trou (un « point »)
2. du chemin suivi par une petite bille (assimilée à un « point ») lors de sa chute après avoir été lâchée sans vitesse initiale.
3. un fil tendu à ses deux extrémités.

La **règle** (ou **latte**) est l'outil qui permet de construire des segments de droites.

1.2 Mesure de la distance entre deux points

Euclide¹ remarque qu'il est toujours possible de superposer deux segments de droites² de façon que l'un soit **inclus (symbole $\subset$)** dans l'autre.³

Cette propriété permet de mesurer la longueur d'un segment de droite en le comparant à un autre segment choisi comme **unité**.

Le **compas** est l'outil qui permet de comparer la longueur de deux segments de droite.

Un fil tendu permet de vérifier qu'une ligne est droite et aussi de reporter des longueurs.

Un fil tendu est à la fois une règle et un compas de référence.

Le mot « géométrie », qui signifie étymologiquement⁴ « **Mesure du terrain** », prend tout son sens avec l'invention des outils permettant de mesurer la distance entre deux « points ».

1.3 Axiome d'incidence Droite-Droite

L'image que le mathématicien se fait d'une droite correspond à celle d'un fil tendu « infiniment fin » prolongé « à l'infini » à ses deux extrémités.

Axiome 1 : Incidence de deux droites

Par deux points distincts, il passe une droite et une seule.

1. Euclide est un mathématicien de la Grèce Antique (environ 300 avant notre ère).

2. la ligne droite est celle qui est également placée entre ses points. Définition 4 du livre I des éléments d'Euclide

3. Tous les points qui constituent le plus petit des deux segments sont aussi des points du plus grand.

$E_1 \subset E_2$ se lit E_1 est inclus dans E_2 et signifie que tout point de l'ensemble E_1 est aussi un point de l'ensemble E_2 .

4. étymologiquement : qui fait référence à l'origine du mot. Ici « Gé » signifie Terre et « Métrie » mesure.

Le contraire de distincts est **confondus**. Deux points confondus sont égaux : ils se situent à une même position.

1.4 Règles d'intersections de deux droites

De l'axiome d'incidence de deux droites, on déduit immédiatement que :

1. Deux droites ayant plus d'un point en commun sont confondues⁵. On dit aussi que les deux droites sont égales. Chacune d'elle est incluse dans l'autre.
2. Deux droites n'ayant aucun point en commun sont **disjointes**⁶. On dit aussi que l'intersection des deux droites est l'ensemble vide.
3. Deux droites distinctes (non confondues) mais pas disjointes ont **exactement** un point en commun. Deux droites distinctes mais pas disjointes sont dite **sécantes** (en un seul point).

2 Plans

2.1 Surfaces planes

Le sol ou les murs d'une pièce fournissent des exemples de **surfaces planes**. Ces surfaces sont toutefois délimitées alors qu'**un plan n'a pas de limites**.

Un autre exemple familier de surface plane est celle de la surface d'un bureau. Un fil tendu ou une latte permettent de vérifier que la surface est bien plane. **La latte doit toujours être complètement en contact avec le bureau quelle que soit sa position sur celui-ci.**

2.2 Axiome d'incidence Plan-Plan

Axiome 2 : Incidence de deux Plans

Par trois points non alignés^a, il passe un plan et un seul.

Par ailleurs, l'intersection de deux plans ne peut se réduire à un seul point.

a. non situés sur une même droite

2.3 Axiome d'incidence Droite-Plan

Axiome 3 : Incidence d'une droite et d'un plan

Si une droite a deux points distincts en commun avec un plan alors elle est **incluse** dans ce plan : **tous les points de cette droite sont aussi des points du plan considéré.**

Cette propriété permet par exemple aux maçons de construire des surfaces planes en utilisant des règles. **Quand on déplace une règle sur une surface plane, celle-ci doit rester en contact avec la surface en chacun de ses points.**

5. Tout point de l'une est aussi un point de l'autre **et réciproquement**. $d_1 = d_2 \Leftrightarrow (d_1 \subset d_2 \text{ ET } d_2 \subset d_1)$
 $\Leftrightarrow$ est le symbole d'équivalence.

$d_1 = d_2$ signifie que les droites d_1 et d_2 sont confondues.

6. $d_1 \cap d_2 = \emptyset$: l'ensemble des points appartenant à la fois à d_1 et à d_2 est vide. $\cap$ est le symbole d'intersection.

2.4 Règles d'intersections d'une droite d et d'un plan α

1. Une droite d ayant deux points distincts en commun avec un plan α est incluse dans ce plan ($d \subset \alpha$). Si $d \subset \alpha$ alors $d \cap \alpha = d$, ce qui s'écrit aussi : $d \subset \alpha \implies d \cap \alpha = d$.
2. Une droite d et un plan α n'ayant aucun point en commun sont disjoints. On a alors : $d \cap \alpha = \emptyset$
3. Une droite d non incluse dans un plan α mais pas disjointe de ce dernier a **exactement** un point M en commun avec ce plan. Ce point M est appelé **point de percée** de la droite d dans le plan α . On a alors $d \cap \alpha = \{M\}$

2.5 Règles d'intersections de deux plans α_1 et α_2

1. Deux plans ayant trois points non alignés en commun sont confondus. $\alpha_1 = \alpha_2$
2. Deux plans n'ayant aucun point en commun sont disjoints. $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \emptyset$
3. Deux plans distincts (non confondus) mais pas disjoints ont **exactement** une droite en commun. $\alpha_1 \cap \alpha_2 = d$

La troisième règle signifie que deux plans distincts (pas confondus) mais pas disjoints (intersection non vide, donc au moins deux points distincts) sont sécants **en une droite**. En effet, les points d'intersection sont nécessairement alignés (sinon les deux plans seraient confondus) et la droite qui passe par ces deux points est incluse dans chacun des deux plans.

On peut résumer ainsi les différents cas d'intersection de deux plans :

1. l'ensemble vide $\emptyset$ (si les deux plans sont disjoints)
2. une droite (si les deux plans sont sécants)
3. un plan (si les deux plans sont confondus)

3 Droites parallèles

3.1 Axiome d'Euclide

Propriété 1 : Axiome d'Euclide

Soit une droite AB et un point C n'appartenant pas à cette droite ($C \notin AB$). Il existe une droite d unique, incluse dans le plan ABC ($d \subset ABC$) et disjointe de AB ($d \cap AB = \emptyset$).

La droite d est la **parallèle à la droite AB passant par C** .

3.2 Le plan « vu » comme la réunion d'une infinité de droites. Droites parallèles

Trois points non alignés A , B et C définissent un plan que l'on peut nommer ABC .

Pour obtenir tous les points du plan ABC , on peut commencer par construire la droite AB .

On sait que $AB \subset ABC$ (tous les points de la droite AB appartiennent aussi au plan ABC).

A , B et C étant non alignés, $C \notin AB$.

Ainsi tout point $M \in AB$ est distinct de C et définit donc une droite CM incluse dans le plan ABC (car C et M appartiennent à ce plan).

Notons $\alpha' = \bigcup_{M \in AB} CM$ la réunion de toutes les droites passant par C et un point M de la droite AB .

Pour obtenir tous les points du plan ABC , il manque les points de la droite d , parallèle à AB et passant par C . Cette droite est sécante en C avec chaque droite CM et est disjointe avec AB ($d \cap AB = \emptyset$).

$$ABC = \left(\bigcup_{M \in AB} CM \right) \cup d \quad \text{avec } d \text{ parallèle à } AB \text{ passant par } C$$

Nous verrons, en géométrie dans l'espace, qu'il existe des droites disjointes de AB , passant par C et non incluses dans le plan ABC . La seule droite qui soit incluse dans ABC , disjointe à AB et passant par C est la parallèle à AB passant par C (Axiome d'Euclide).

4 Constructions élémentaires dans le plan

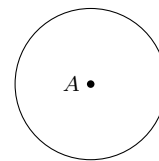
Le bureau sur lequel est posé votre feuille est une surface plane. Vous pouvez le vérifier en déplaçant votre latte sur celui-ci ! Vos outils sont le compas (pour reporter des longueurs) et une latte non graduée (pour tracer des segments de droite).

4.1 Cercle

L'ensemble des points du plan situés à une même distance r d'un point A est un **cercle**.

A est appelé le **centre du cercle**.

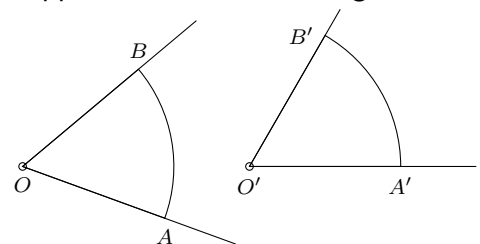
r est un nombre positif appelé le **rayon du cercle**.



4.2 Reporter un angle

Un **angle** est défini par deux demi-droites issues d'un même point appelé le sommet de l'angle.

Reporter un angle revient à dessiner un triangle $\triangle O'A'B'$ isométrique à un triangle $\triangle OAB$ donné à partir de l'origine O' d'une demi-droite donnée. Avec un compas, on détermine A' sur la demi-droite donnée ($|O'A'| = |OA|$) puis B' car $|A'B'| = |AB|$ et $|O'B'| = |OB|$

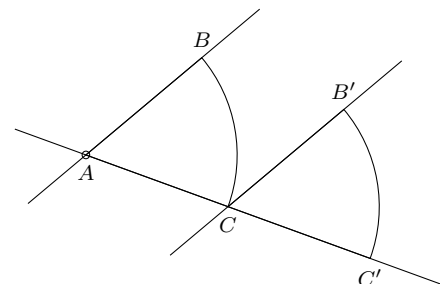


4.3 Tracer la parallèle à la droite AB passant par C

On trace la droite AC .

On reporte l'angle défini par les demi-droites AC et AB à partir de C et de la demi-droite CC' .

La droite cherchée est la droite CB' .



Les deux angles ainsi construits sont dit **correspondants**.